1 Понятие числового ряда. Критерий Коши. Необходимое и достаточное условие сходимости рядов с неотрицательными членами.

1.1 Понятие числового ряда.

Рассмотрим числовую последовательность $u_1,\ u_2,\ \dots,\ u_k,\ \dots$ и запишем формально бесконечную сумму вида

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_k + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k. \tag{1.1}$$

Составленную таким образом сумму будем называть *числовым рядом*. Отдельные слагаемые u_k будем называть *членами ряда*.

1.2 Сходящиеся и расходящиеся ряды.

Сумму вида

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \tag{1.2}$$

будем называть *n-ой частичной суммой* ряда (1.1).

Определение 1.1. Ряд (1.1) называется *сходящимся*, если сходится последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм. При этом предел S последовательности $\{S_n\}$ называется *суммой ряда*.

Соответственно, для сходящегося ряда (1.1) можно формально записать равенство:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} u_k. \tag{1.3}$$

Если для данного ряда (1.1) предела последовательности (1.2) не существует, ряд называется *расходящимся*.

1.3 Простейшие свойства рядов.

Отметим простейшие свойства, которые вытекают непосредственно из определения числового ряда.

Утверждение 1.1. Отбрасывание или добавление конечного числа членов не влияет на сходимость ряда.

Доказательство. Утверждение верно в силу того, что отбрасывание или добавление изменяет все частичные суммы ряда, начиная с некоторого номера, на постоянную величину.

Утверждение 1.2. Если c — отличная от нуля постоянная, и $v_k = cu_k$ $(\forall k)$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится и расходится одновременно с рядом $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

Доказательство. Пусть S_n^u и S_n^v — n-ые частичные суммы рядов $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$, соответственно. Тогда $S_n^v = cS_n^u$ $(\forall n)$, причем $c \neq 0$. Отсюда $\lim_{n\to\infty} S_n^v$ существует тогда и только тогда, когда существует $\lim_{n\to\infty} S_n^u$, что равносильно утверждению 1.2.

1.4 Критерий Коши сходимости ряда.

Теорема 1.1 (критерий Коши для ряда). Для того, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε нашелся номер N такой, что для всех номеров n таких, что $n \geq N$, и для всех натуральных чисел p было выполнено

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right| = S_{n+p} - S_n, \tag{1.5}$$

что, в свою очередь, доказывает теорему согласно критерию Коши для последовательности $\{S_n\}$.

Следствие 1. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится, то последовательность его n-ых остатков

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \tag{1.6}$$

является бесконечно малой.

Доказательство. Согласно критерию Коши для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что при $n \geq N$ выполнено $|r_n| < \varepsilon$ (т.к. неравенство в критерии Коши должно быть справедливо для всех p). Отсюда по определению получаем, что $\{r_n\}$ — бесконечно малая последовательность.

Следствие 2. Для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ необходимо, чтобы последовательность его членов $\{u_n\}$ была бесконечно малой.

Доказательство. Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N_0 такой, что для всех $n \geq N_0$ будем иметь $|u_n| < \varepsilon$. Зафиксируем произвольное значение ε. По теореме 1.1 найдется номер N такой, что при $n \geq N$ и для любого натурального p выполняется неравенство (1.4). В частности, при $p = 1$:

$$|u_{n+1}| < \varepsilon. \tag{1.7}$$

Пусть теперь $N_0 = N + 1$, тогда, очевидно, при $n \geq N_0$ получим $|u_n| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Замечание. Иначе следствие 2 можно сформулировать так: для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ необходимо, чтобы

$$\lim_{k \to \infty} u_k = 0. \tag{1.8}$$

Следствие 2 задает необходимое, но не достаточное условие сходимости ряда. В частности, для *гармонического ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \tag{1.9}$$

выполнено необходимое условие сходимости, но последовательность его частичных сумм расходится.

1.5 Необходимое и достаточное условие сходимости ряда с неотрицательными членами.

Сразу же отметим, что для ряда с неотрицательными членами $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1.3. Последовательность частичных сумм ряда с неотрицательными членами является неубывающей.

Теорема 1.2. Для того, чтобы ряд с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда $\{S_n\}$ была ограничена.

`Необходимость.` Необходимость следует из того, что всякая сходящаяся последовательность является ограниченной.

`Достаточность.` Так как последовательность частичных сумм не убывает, для ее сходимости достаточно ограниченности.

2 Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.

2.1 Признаки сравнения рядов с неотрицательными членами.

Установим сначала признаки, которые позволяют дать заключение о сходимости ряда на основании сравнения с другим рядом, сходимость которого уже изучена.

Теорема 2.1. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ — два ряда с неотрицательными членами, и пусть для всех номеров k справедливо неравенство

$$p_k \le q_k. \tag{2.1}$$

Тогда сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ влечет сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ влечет расходимость $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$.

Доказательство. Обозначим n-ые частичные суммы рядов $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ соответственно как S_n^p и S_n^q. Из неравенства (2.1) непосредственно следует, что для любого n выполнено неравенство

$$S_n^p \le S_n^q. \tag{2.2}$$

Это неравенство означает, что ограниченность последовательности частичных сумм $\{S_n^q\}$ влечет ограниченность последовательности $\{S_n^p\}$, и, наоборот, неограниченность $\{S_n^p\}$ влечет неограниченность $\{S_n^q\}$. В силу необходимого и достаточного условия сходимости ряда с неотрицательными членами теорема доказана.

Замечание 1. Можно требовать выполнения неравенства (2.1) не для всех k, а лишь начиная с некоторого номера k. Это справедливо в силу того, что отбрасывание конечного числа членов никак не влияет на сходимость ряда.

Замечание 2. Теорема (2.1) продолжает оставаться справедливой, если заменить неравенство в ее условии на следующее:

$$p_k \le c q_k, \tag{2.3}$$

где c — любая положительная постоянная. Утверждение справедливо в силу того, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ сходится и расходится одновременно с рядом $\sum_{k=1}^{\infty} c q_k$.

Следствие 1. Если $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ — ряд с неотрицательными членами, а $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ — ряд со строго положительными членами, и существует конечный предел

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{q_k} = L, \tag{2.4}$$

то сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ влечет сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ влечет расходимость $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$.

Доказательство. По определению предела последовательности для $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $k \geq N$

$$L - \varepsilon < \frac{p_k}{q_k} < L + \varepsilon. \tag{2.5}$$

Следовательно, при $k \geq N$ справедливо $p_k < (L+\varepsilon)q_k$. Это последнее неравенство совпадает с неравенством (2.3) при $c = L + \varepsilon$, в силу чего теорема доказана.

Теорема 2.2. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ — два ряда со строго положительными членами, и для всех k выполнено

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{q_{k+1}}{q_k}. \tag{2.6}$$

Тогда сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ влечет за собой сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ влечет расходимость $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$.

Доказательство. Запишем неравенство (2.6) для номеров $k = 1, 2, \ldots, n-1$, где n — любой фиксированный номер:

$$\begin{gathered} \frac{p_2}{p_1} \leq \frac{q_2}{q_1}, \\ \frac{p_3}{p_2} \leq \frac{q_3}{q_2}, \\ \vdots \\ \frac{p_n}{p_{n-1}} \leq \frac{q_n}{q_{n-1}}. \end{gathered}$$

Перемножая почленно все написанные неравенства, получим

$$\frac{p_n}{p_1} \leq \frac{q_n}{q_1}, \text{ или } p_n \leq \frac{p_1}{q_1} p_n. \tag{2.7}$$

В этом неравенстве величина $\frac{p_1}{q_1}$ представляет собой фиксированную положительную постоянную. Поэтому в силу замечания 2 к теореме (2.1) теорема (2.2) доказана.

2.2 Признак Даламбера.

Теорема 2.3 (признак Даламбера). Если для всех номеров k, по крайней мере начиная с некоторого номера, справедливо неравенство

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq Q < 1 \quad \left(\text{соответственно } \frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1\right), \tag{2.8}$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (соответственно расходится).

Доказательство. Для доказательства теоремы положим $q_k = Q^k$ (соответственно $q_k = 1$). Тогда $\frac{q_{k+1}}{q_k} = Q$, где $Q < 1$ (соответственно, $\frac{q_{k+1}}{q_k} = 1$), и неравенство (2.8) можно переписать в виде

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{q_{k+1}}{q_k} \quad \left(\text{соответственно } \frac{p_{k+1}}{p_k} \geq \frac{q_{k+1}}{q_k}\right). \tag{2.9}$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ совпадает либо с рядом $\sum_{k=1}^{\infty} Q^k = Q + Q^2 + \ldots$, либо с рядом $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \ldots$ и, соответственно, сходится или расходится (соответственно, как геометрическая прогрессия со знаменателем, меньшим 1; и в силу отсутствия стремления к нулю членов). Таким образом, с учетом теоремы (2.2), теорема доказана.

Теорема 2.4 (признак Даламбера в предельной форме). Если существует предел последовательности

$$\lim_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L, \tag{2.10}$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится при $L < 1$ и расходится при $L > 1$.

Доказательство. Пусть сначала $L < 1$. Возьмем ε такое, что $L = 1 - 2\varepsilon$, т.е. $L + \varepsilon = 1 - \varepsilon$. Тогда по определению предела для указанной последовательности найдется номер N такой, что для всех $k \geq N$

$$L - \varepsilon < \frac{p_{k+1}}{p_k} < L + \varepsilon = 1 - \varepsilon. \tag{2.11}$$

Число $L + \varepsilon = 1 - \varepsilon$ оторвано от единицы и играет роль Q в непредельной форме теоремы Даламбера, в силу чего ряд сходится.

Пусть теперь $L > 1$. Тогда найдется такое положительное ε, что $L = 1 + \varepsilon$ и $L - \varepsilon = 1$. Тогда, опять же, по определению предела последовательнсти

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} > L - \varepsilon = 1 \tag{2.12}$$

для всех k, начиная с некоторого номера N. Тогда ряд расходится на основании признака Даламбера в непредельной форме.

2.3 Признак Коши.

Теорема 2.5 (признак Коши). Если для всех номеров k, по крайней мере начиная с некоторого номера, справедливо неравенство

$$\sqrt[k]{p_k} \leq Q < 1 \quad (\text{соответственно, } \sqrt[k]{p_k} \geq 1)\,, \tag{2.13}$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (соответственно расходится).

Доказательство. Пусть, опять же $q_k = Q^k$ (соответственно $q_k = 1$). Тогда неравенство (2.13) принимает вид

$$p_k \leq q_k \quad (p_k \geq q_k)\,. \tag{2.14}$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$, совпадающий с рядом $\sum_{k=1}^{\infty} Q^k$ (соответственно $\sum_{k=1}^{\infty} 1$), сходится (соответственно расходится). Тогда на основании теоремы сравнения (2.1) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится (расходится), что и требовалось доказать.

Теорема 2.6 (признак Коши в предельной форме). Если существует предел последовательности

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{p_k} = L, \tag{2.15}$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ сходится при $L < 1$ и расходится при $L > 1$.

`Доказательство` полностью аналогично доказательству теоремы Даламбера в предельной форме.

2.4 Интегральный признак Коши-Маклорена.

Теорема 2.7 (признак Коши-Маклорена). Пусть функция $f(x)$ неотрицательна и не возрастает всюду на полупрямой $x \geq m$, где m — фиксированное натуральное число. Тогда числовой ряд

$$\sum_{k=m}^{\infty} f(k) = f(m) + f(m+1) + \dots \tag{2.16}$$

сходится тогда и только тогда, когда существует предел при $n \to \infty$ последовательности

$$a_n = \int\limits_m^n f(x)dx. \tag{2.17}$$

`Доказательство.` Пусть k — любой номер, удовлетворяющий условию $k \geq m+1$, а x — любое значение аргумента из сегмента $k-1 \leq x \leq k$. По условию функция $f(x)$ не возрастает, поэтому для всех x из указанного сегмента справедливо

$$f(k) \leq f(x) \leq f(k-1). \tag{2.18}$$

Функция $f(x)$ ограниченна и монотонна, а, следовательно, интегрируема на сегменте $[k-1, k]$. Более того,

$$\int\limits_{k-1}^{k} f(k)dx \leq \int\limits_{k-1}^{k} f(x)dx \leq \int\limits_{k-1}^{k} f(k-1)dx, \tag{2.19}$$

что эквивалентно

$$f(k) \leq \int\limits_{k-1}^{k} f(x)dx \leq f(k-1). \tag{2.20}$$

Указанные неравенства выполняются для всех $k \geq m+1$. Запишем серию таких неравенств для значений $k = m+1, m+2, \dots, n$, где n — любой номер

$(n > m)$:

$$f(m+1) \leq \int\limits_{m}^{m+1} f(x)dx \leq f(m),$$

$$f(m+2) \leq \int\limits_{m+1}^{m+2} f(x)dx \leq f(m+1),$$

$$\ldots$$

$$f(n) \leq \int\limits_{n-1}^{n} f(x)dx \leq f(n-1).$$

Почленно складывая записанные неравенства, получим

$$\sum_{k=m+1}^{n} f(k) \leq \int\limits_{m}^{n} f(x)dx \leq \sum_{k=m}^{n-1} f(k). \tag{2.21}$$

Обозначим n-ую частичную сумму ряда через S_n:

$$S_n = \sum_{k=m}^{n} f(k). \tag{2.22}$$

Неравенство (2.21) тогда примет вид:

$$S_n - f(m) \leq a_n \leq S_{n-1}. \tag{2.23}$$

Очевидно, что последовательность $\{a_n\}$ является неубывающей. Тогда для ее сходимости необходима и достаточна ограниченность. Для ряда, в свою очередь, необходима и достаточна ограниченность последовательности частичных сумм $\{S_n\}$. Поскольку $f(m)$ — некоторое фиксированное число, из неравенства (2.23) вытекает одновременность ограниченности последовательностей $\{a_n\}$ и $\{S_n\}$. Таким образом, ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность $\{a_n\}$.

3 Теоремы Коши и Римана о перестановке членов в числовых рядах.

3.1 Абсолютная и относительная сходимость.

Определение 3.1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$.

Определение 3.2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ называется *условно сходящимся*, если сам он сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ расходится.

Заметим, что в определении абсолютной сходимости ничего не говорится о том, сходится ли ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$. Это излишне в силу того, что верна следующая теорема.

Теорема 3.1. Из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ следует сходимость $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

Доказательство. Воспользуемся критерием Коши для ряда. По сути требуется доказать, что для любого положительного ε найдется номер N такой, что для всех $n \geq N$, и для любого натурального p справедливо

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ сходится, в силу критерия Коши для него найдется номер N такой, что для всех номеров $n \geq N$, и для любого натурального p справедливо

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Поскольку модуль суммы не превосходит суммы модулей, получим

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| < \varepsilon, \tag{3.3}$$

что и доказывает теорему.

3.2 Теорема Римана.

Теорема 3.2 (теорема Римана). Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится условно, то каково бы ни было наперед взятое число L, можно так переставить члены этого ряда, что преобразованный ряд будет сходиться к числу L.

Доказательство. Итак, пусть дан условно сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$. Обозначим через p_1, p_2, ... положительные члены этого ряда, выписанные в порядке следования, и через q_1, q_2, $\ldots$ модули отрицательных членов, также выписанные в порядке следования в исходном ряду. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов, так как если бы он содержал, например, конечное число положительных членов, то, отбросив достаточное количество начальных членов ряда, мы получили бы ряд, полностью состоящий из отрицательных членов, для которого сходимость, очевидно, равносильна абсолютной сходимости.

Итак, имеем два ряда с положительными членами: $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$. Докажем, что оба эти ряда расходятся. Обозначим через S_n n-ую частичную сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, через P_n сумму всех положительных членов, входящих в S_n, и через Q_n сумму модулей всех отрицательных членов, входящих в S_n. Очевидно, что тогда $S_n = P_n - Q_n$, и, в силу того, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится к некоторому числу S

$$\lim_{n\to\infty} (P_n - Q_n) = S. \tag{3.4}$$

С другой стороны, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ не сходится абсолютно, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} (P_n + Q_n) = +\infty. \tag{3.5}$$

В силу двух последних неравенств, оба ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$ расходятся, так как пределы их частичных сумм равны $+\infty$. Из расходимости следует, что при удалении любого конечного числа первых элементов этих рядов, из оставшихся членов как ряда $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$, так и ряда $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$, мы сможем взять столь большое число членов, что их сумма превзойдет любое наперед заданное число.

Докажем тогда, что можно так переставить члены ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, что в результате получится ряд, сходящийся к числу L. Для этого выберем из исходного ряда ровно столько положительных членов p_1, p_2, $\ldots$, p_k, чтобы их сумма $p_1+p_2+\ldots+p_k$ превзошла L. Теперь добавим к выбранным членам ровно столько отрицательных членов $-q_1$, $-q_2$, $\ldots$, $-q_l$, чтобы общая сумма

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k - q_1 - q_2 - \ldots - q_l \tag{3.6}$$

оказалась меньше L. Продолжая бесконечно подобные шаги, мы получим бесконечный ряд, в состав которого войдут все члены исходного ряда (в силу того, что на каждом шаге нужно будет добавлять хотя бы один положительный и один отрицательный член). Докажем теперь, что ряд, полученный такой перестановкой, сходится к числу L.

Заметим, что в полученном ряде чередуются группы положительных и отрицательных чисел. Если выбранная n-ая частичная сумма $\{S_n\}$ заканчивается одновременно с очередной группой членов, то отклонение этой суммы от числа L не превышает модуля последнего члена этой группы. В противном случае, отклонение от L не больше модуля последнего члена предпоследней группы. Так как исходный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходился, то последовательность последних членов групп образует бесконечно малую последовательность, и, значит, частичные суммы будут постоянно приближаться к числу L, то есть

$$\lim_{n\to\infty} S_n = L, \tag{3.7}$$

что и требовалось доказать.

3.3 Теорема Коши.

Теорема 3.3 (теорема Коши). Если заданный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится абсолютно, то любой ряд, полученный из него некоторой перестановкой членов, также будет сходиться абсолютно и иметь ту же сумму, что и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

Доказательство. Пусть исходный ряд имел сумму S, и пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ — ряд, полученный из ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ некоторой перестановкой членов.

Покажем сначала, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится к той же сумме S. Для этого достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что при $n \geq N$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} v_k - S\right| < \varepsilon. \tag{3.8}$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится абсолютно к сумме S, поэтому для данного ε можно указать номер N_0 такой, что будут справедливы неравенства

$$\sum_{k=N_0+1}^{N_0+p} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.9}$$

где p — любое натуральное число; и

$$\left|\sum_{k=1}^{N_0} u_k - S\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.10}$$

Номер N_0 в обоих неравенствах можно выбрать один и тот же, равный наибольшему из номеров для каждого из неравенств. Теперь выберем номер N столь большим, чтобы любая частичная сумма $S_n{}'$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ с номером n, превосходящим N, содержала N_0 первых членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$. При таком выборе N получим

$$\left|\sum_{k=1}^{n} v_k - S\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} v_k - \sum_{k=1}^{N_0}\right| + \left|\sum_{k=1}^{N_0} u_k - S\right|. \tag{3.11}$$

С учетом неравенства (3.10) достаточно доказать, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n} v_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.12}$$

как только $n \geq N$. Заметим теперь, что при $n \geq N$ первая из сумм содержит все N_0 первых членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, вследствие чего разность под знаком модуля представляет собой сумму $n - N_0$ членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ с номерами, каждый из которых превосходит N_0.

Если теперь выбрать натуральное число p столь большим, чтобы номер $N_0 + p$ превосходил номера всех членов указанной суммы, то для разности в левой части (3.12) справедливо

$$\left|\sum_{k=1}^{n} v_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k\right| \leq \sum_{N_0+1}^{N_0+p} |u_k|. \tag{3.13}$$

Отсюда с учетом (3.9) и вытекает неравенство (3.12). Тем самым доказывается неравенство (3.8), в силу чего ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится и имеет ту же сумму S, что и исходный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

Остается показать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится абсолютно. С учетом доказанного первого пункта, можно применить его логику к рядам $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|$. Получим сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|$, то есть абсолютную сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$.

Теорема Коши полностью доказана.

4 Признаки сходимости произвольных числовых рядов.

4.1 Преобразование Абеля.

Установим сначала одно важное тождество, которое является основой доказательства рассматриваемых ниже признаков сходимости.

Утверждение 4.1 (преобразование Абеля). Пусть $\{u_k\}$ и $\{v_k\}$ — две произвольные последовательности, $S_k = u_1 + u_2 + \ldots + u_k$, n и p — два произвольных параметра (при этом $n \geq 0$, $S_0 = 0$). Тогда справедливо следующее тождество:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Так как для любого номера k справедливо неравенство $u_k = S_k - S_{k-1}$, то левой части (4.1) можно придать вид

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} S_{k-1} v_k. \tag{4.2}$$

Во второй сумме правой части заменим индекс суммирования k на $k+1$:

$$\begin{gathered} \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_{k+1} = \\ = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1}, \end{gathered} \tag{4.3}$$

что совпадает с (4.1).

4.2 Признаки Абеля.

Определение 4.1. Последовательность $\{v_k\}$ будем называть *последовательностью с ограниченным изменением*, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k|. \tag{4.4}$$

Утверждение 4.2. Всякая последовательность с ограниченным изменением сходится.

Доказательство. В самом деле, из сходимости ряда модулей (4.4) следует сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(v_{k+1} - v_k). \tag{4.5}$$

Обозначим сумму ряда (4.5) через S, а n-ую частичную его сумму через S_n. Тогда, с учетом того, что $S_n = v_{n+1} - v_1$, получим, что предел

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} v_{n+1} \tag{4.6}$$

существует и равен $S + v_1$, откуда следует, что последовательность $\{v_k\}$ сходится к пределу $S + v_1$.

Теорема 4.1 (первый признак Абеля). Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ обладает ограниченной последовательностью частичных сумм, а $\{v_k\}$ — последовательность с ограниченным изменением, сходящаяся к нулю, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k \tag{4.7}$$

сходится.

Доказательство. Согласно условию теоремы, существует такое положительное число M, что последовательность частичных сумм S_n ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ обладает свойством $|S_n| \le M$ для всех n.

Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$, и по нему номер N такой, что для всех $n \ge N$ выполнены условия:

$$|v_n| < \frac{\varepsilon}{3M}, \tag{4.8}$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1} - v_k| < \frac{\varepsilon}{3M}. \tag{4.9}$$

В силу тождества Абеля и того обстоятельства, что модуль суммы трех величин не превосходит суммы их модулей, получим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| \le \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(v_k - v_{k+1})\right| + |S_{n+p}||v_{n+p}| + |S_n||v_{n+1}|. \tag{4.10}$$

Дополнительно учтя, что для всех n справедливо $|S_n| \le M$, получим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| \le M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_k - v_{k+1}| + M|v_{n+p}| + M|v_{n+1}|. \tag{4.11}$$

С учетом неравенств (4.8) и (4.9), наконец, получим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k\right| < \varepsilon, \tag{4.12}$$

что в силу критерия Коши означает, что ряд (4.7) сходится, что и требовалось доказать.

Теорема 4.2 (второй признак Абеля). Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится, а $\{v_k\}$ представляет собой произвольную последовательность с ограниченным изменением, то ряд (4.7) сходится.

Доказательство. Так как сходящийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ обладает ограниченной последовательностью частичных сумм, существует число $M > 0$ такое, что $|S_n| \leq M$ для всех номеров n.

Обозначим сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ через S, а предел последовательности $\{v_k\}$ через v. Тогда можно утверждать, что каждое из произведений $\{S_n v_n\}$ и $\{S_n v_{n+1}\}$ сходится при $n \to \infty$ к пределу Sv, и, в силу этого, каждая из последовательностей

$$\{S_n v_n - Sv\} \text{ и } \{S_n v_{n+1} - Sv\} \tag{4.13}$$

является бесконечно малой.

С учетом этого и сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k|$, фиксируя положительное число ε, мы найдем номер N такой, что для всех $n \geq N$ и для всех натуральных p

$$|S_n v_n - Sv| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \ |S_n v_{n+1} - Sv| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{4.14}$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1} - v_k| < \frac{\varepsilon}{3M}. \tag{4.15}$$

Учитывая, что $|S_n| \leq M$, и подставляя неравенства (4.14) и (4.15) в тождество Абеля, переписанное в виде

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + (S_{n+p} v_{n+p} - Sv) + (Sv - S_n v_{n+1}), \tag{4.16}$$

получим неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k \right| < \varepsilon, \tag{4.17}$$

что и доказывает теорему в силу критерия Коши для ряда.

4.3 Признак Дирихле-Абеля.

Непосредственным следствием из первого признака Абеля является *признак Дирихле-Абеля.*

Теорема 4.3 (признак Дирихле-Абеля). Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ обладает ограниченной последовательностью частичных сумм, а последовательность $\{v_k\}$ не возрастает и сходится к нулю, то ряд (4.7) сходится.

Доказательство. Достаточно заметить, что невозрастающая и сходящаяся к нулю последовательность является последовательностью с ограниченным изменением, так как для нее n-ая частичная сумма S_n ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |v_k - v_{k+1}|$ равна $v_1 - v_{n+1}$ и, в силу того, что v_1 — некоторая постоянная величина, а $v_n \to 0$ при $n \to \infty$, частичные суммы S_n имеют предел, равный v_1.

4.4 Признак Лейбница.

Определение 4.2. Будем называть ряд *знакочередующимся*, если все его члены с нечетными номерами положительны, а все члены с четными номерами отрицательны.

Определение 4.3. Знакочередующийся ряд, модули членов которого образуют невозрастающую сходящуюся к нулю последовательность, будем называть *рядом Лейбница*.

Теорема 4.4 (признак Лейбница). Любой ряд Лейбница сходится.

Доказательство. Всякий ряд Лейбница представим в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} v_k = v_1 - v_2 + v_3 - \ldots, \tag{4.18}$$

где $\{v_k\}$ — невозрастающая и сходящаяся к нулю последовательность. Этот ряд является частным случаем ряда (4.7) при $u_k = (-1)^{k-1}$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ при этом, очевидно, обладает ограниченной последовательностью частичных сумм (их последовательность имеет вид 1, 0, 1, 0, ...). Тогда по признаку Дирихле-Абеля признак Лейбница справедлив.

5 Арифметические операции над сходящимися рядами. Теорема Мертенса.

5.1 Почленное сложение и умножение сходящихся рядов.

Теорема 5.1. Если два ряда, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$, сходятся и имеют суммы, соответственно равные U и V, то и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k \pm v_k)$ сходится и имеет сумму, равную $U \pm V$.

Доказательство. Обозачим n-ые частичные суммы рядов $\sum_{k=1}^{\infty}(u_k \pm v_k)$, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ соответственно как S_n, U_n и V_n. Тогда, очевидно, для всех n выполнено $S_n = U_n \pm V_n$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} U_n = U, \tag{5.1}$$

$$\lim_{n\to\infty} V_n = V, \tag{5.2}$$

то (на основании теоремы о сложении и вычитании сходящихся последовательностей) существует предел последовательности $\{S_n\}$, равный $U \pm V$. Теорема доказана.

Теорема 5.2. Если два ряда, $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$, сходятся абсолютно и имеют суммы, соответственно равные U и V, то ряд, составленный из всех произведений вида $u_k v_l$ (где $k = 1, 2, \ldots$, $l = 1, 2, \ldots$), занумерованных в произвольном порядке, также сходится абсолютно и имеет своей суммой UV.

Доказательство. Обозначим через w_1, w_2, ... произведения вида $u_k v_l$, занумерованные в произвольном порядке. Докажем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |w_k|$ сходится. Пусть S_n — n-ая частичная сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |w_k|$, она, очевидно, состоит из слагаемых вида $|u_k v_l|$. Среди индексов l и k членов, входящих в данную сумму, выберем наибольший индекс, который обозначим через m. Тогда

$$S_n \leq (|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_m|)(|v_1| + |v_2| + \ldots + |v_m|). \tag{5.3}$$

В правой части (5.3) стоит произведение m-ых частичных сумм рядов $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |v_k|$. В силу сходимости этих рядов с неотрицательными членами, все их частичные суммы (и, соответственно, их произведения) ограничены. Поэтому и последовательность $\{S_n\}$ ограничена, а это доказывает сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |w_k|$, то есть абсолютную сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$.

Осталось показать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ имеет сумму S, равную UV. Так как этот ряд сходится абсолютно, то в силу теоремы Коши о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда, его сумма не зависит от порядка следования членов. Тогда, так как последовательность W_m частичных сумм этого ряда

$$W_m = (u_1 + u_2 + \ldots + u_m)(v_1 + v_2 + \ldots + v_m) \tag{5.4}$$

сходится к числу UV (как произведение двух подпоследовательностей последовательностей, сходящихся соответственно к числам U и V), его сумма равна UV, что и требовалось доказать.

5.2 Теорема Мертенса.

Произведение двух рядов $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ часто бывает удобно записывать в специальном виде:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k\right) \tag{5.5}$$

$$\Updownarrow$$

$$u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + \ldots + (u_1v_k + u_2v_{k-1} + \ldots + u_kv_1) + \ldots . \tag{5.6}$$

Теорема 5.3 (теорема Мертенса). Ряд, полученный перемножением двух рядов указанным способом, сходится к произведению сумм перемножаемых рядов в случае, когда один из рядов сходится абсолютно, а другой сходится хотя бы условно.

`Доказательство.` Пусть, для определенности, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится абсолютно, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ сходится хотя бы условно. Обозначим n-ые частичные суммы этих рядов через U_n и V_n, а их суммы через U и V, соответственно. Обозначим также

$$w_n = u_1v_n + u_2v_{n-1} + \ldots + u_nv_1 \tag{5.7}$$

и

$$W_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n. \tag{5.8}$$

Достаточно доказать, что $\lim_{n\to\infty} W_n = UV$. Очевидно, что $W_n = u_1V_n + u_2V_{n-1} + \ldots + u_nV_1$.

В силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ его остаток $\alpha_n = V - V_n$ является бесконечно малой последовательности, а значит существует такая постоянная M такая, что $|\alpha_n| \leq M$ для всех номеров n. Заметим, что

$$W_n = u_1(V - \alpha_n) + u_2(V - \alpha_{n-1}) + \ldots + u_n(V - \alpha_1) = U_nV - \beta_n, \tag{5.9}$$

где

$$\beta_n = u_1\alpha_n + u_2\alpha_{n-1} + \ldots + u_n\alpha_1. \tag{5.10}$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty} U_n = U$, то достаточно доказать, что последовательность β_n является бесконечно малой (т.к. именно тогда предел при $n \to infty$ последовательности W_n будет равняться UV).

Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится абсолютно, то, фиксировав произвольное $\varepsilon > 0$, найдем отвечающее ему m такое, что

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{5.11}$$

Кроме того, существует такая постоянная M_1, что

$$\sum_{k=1}^{n} |u_k| \leq M_1 \tag{5.12}$$

для всех номеров n.

Представим теперь β_n в виде суммы двух сумм:

$$\beta_n = (u_1\alpha_n + \ldots + u_m\alpha_{n+1-m}) + (u_{m+1}\alpha_{n-m} + \ldots + u_n\alpha_1). \tag{5.13}$$

Выберем по найденному m номер n_1 настолько большой, чтобы было выполнено $|\alpha_k| < \frac{\varepsilon}{2M_1}$ как только $k > n_1 - m$ (такой номер существует в силу бесконечной малости $\{\alpha_n\}$). Сопоставляя все выписанные неравенства, получим, что каждая из скобок в выражении для β_n по модулю меньше, чем $\frac{\varepsilon}{2}$, откуда $|\beta_n| < \varepsilon$ при $n \geq n_1$. В силу произвольности ε утверждение доказано.

6 Необходимое условие сходимости двойного ряда. Связь между сходимостью двойного ряда и повторного ряда. Критерий сходимости двойного ряда с неотрицательными членами.

6.1 Определение двойного и повторного ряда.

Рассмотрим счетное множество бесконечных числовых последовательностей:

$$\begin{gathered} a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots; \\ a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}, \ldots; \\ \vdots \\ a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn}, \ldots; \\ \vdots \end{gathered}$$

В этих обозначениях первый индекс при элементе — номер последовательности, а второй индекс — номер в последовательности.

Если просуммировать все элементы сначала по строкам, а затем по столбцам, получится бесконечная последовательность сумм вида

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}. \tag{6.1}$$

Просуммировав эту последовательность по всем k, получим формальную сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \right), \tag{6.2}$$

которую принято называть *повторным рядом.* Можно, наоборот, сначала суммировать по столбцам, а затем по строкам, тогда повторный ряд будет иметь вид

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} \right). \tag{6.3}$$

Определение 6.1. Повторный ряд (6.2) называется *сходящимся*, если сходится каждый из рядов (6.1) и сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k, \text{ где } A_k = \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}. \tag{6.4}$$

Определение 6.2. Повторный ряд (6.3) называется *сходящимся*, если сходится каждый из рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}, \text{ где } l = 1, 2, \dots \tag{6.5}$$

и сходится ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \hat{A}_l, \text{ где } \hat{A}_l = \sum k = 1^{\infty} a_{kl}. \tag{6.6}$$

Определение 6.3. *Двойной ряд*

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl} \tag{6.7}$$

называется *сходящимся*, если при *независимом* стремлении индексов m и n к бесконечности существует конечный предел

$$\lim_{m,n\to\infty} S_{mn} \tag{6.8}$$

прямоугольных частичных сумм

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}. \tag{6.9}$$

Указанный предел при этом называют *суммой двойного ряда* (6.7).

Сразу же отметим, что из этого определения вытекает следующее утверждение.

Утверждение 6.1. Если двойной ряд (6.7) получен в результате перемножения членов двух сходящихся «одинарных» рядов $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ и $\sum_{l=1}^{\infty} c_l$, и, соответственно, члены ряда (6.7) имеют вид $a_{kl} = b_k c_l$, то ряд (6.7) сходится, и его сумма равна произведению сумм указанных рядов.

6.2 Необходимое условие сходимости двойного ряда.

Заметим, что из определения прямоугольных частичных сумм непосредственно следует, что для всех $m \geq 2$, $n \geq 2$

$$a_{mn} = \left(S_{mn} - S_{m(n-1)}\right) - \left(S_{(m-1)n} - S_{(m-1)(n-1)}\right). \tag{6.10}$$

Теорема 6.1 (необходимое условие сходимости двойного ряда). Для того, чтобы двойной ряд (6.7) сходился, необходимо стремление к нулю его общего члена, т.е. существование равного нулю предела

$$\lim_{m,n\to\infty} a_{mn}. \tag{6.11}$$

Доказательство. Правомерность этого условия очевидна. Действительно, пусть двойной ряд (6.7) сходится. По определению это означает, что существует конечный предел прямоугольных частичных сумм S_{mn}. Но тогда при независимом стремлении m и n к бесконечности общий член a_{mn} двойного ряда представим в виде

$$\lim_{m,n\to\infty} a_{mn} = \lim_{m,n\to\infty}[(S_{mn} - S_{m(n-1)}) - (S_{(m-1)n} - S_{(m-1)(n-1)})], \quad (6.12)$$

что, с учетом сходимости $\{S_{mn}\}$ эквивалентно

$$\left[\lim_{m,n\to\infty} S_{mn} - \lim_{m,n\to\infty} S_{m(n-1)}\right] - \left[\lim_{m,n\to\infty} S_{(m-1)n} - \lim_{m,n\to\infty} S_{(m-1)(n-1)}\right]. \quad (6.13)$$

Все пределы здесь равны одному и тому же конкретному числу S, а, следовательно последовательность $\{a_{mn}\}$ бесконечно малая, что и требовалось доказать.

6.3 Связь между сходимостью двойного ряда и повторного ряда.

Теорема 6.2. Если сходится двойной ряд (6.7) и если также сходятся все ряды по строкам (6.1), то сходится и повторный ряд (6.2), причем к той же сумме, что и двойной ряд.

Доказательство. При фиксированном m перейдем к пределу при $n \to \infty$ в равенстве (6.9):

$$\lim_{n\to\infty} S_{mn} = \sum_{k=1}^{m} A_k, \quad (6.14)$$

где A_k — сумма k-ого ряда (6.1).

Тогда сумма повторного ряда (6.2) есть не что иное, как повторный предел

$$\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} S_{mn}). \quad (6.15)$$

Из существования равного S предела двойного ряда (6.7) вытекает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдуются такие номера m_0 и n_0, что при $m \geq m_0$, $n \geq n_0$ выполнено

$$|S_{mn} - S| < \varepsilon. \quad (6.16)$$

Перейдем в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$. Тогда для всех $m \geq m_0$

$$|\lim_{n\to\infty} S_{mn} - S| \leq \varepsilon, \quad (6.17)$$

что и означает существование и равенство S повторного предела, а, значит, и суммы повторного ряда. Теорема доказана.

6.4 Критерий сходимости двойного ряда с неотрицательными членами.

Теорема 6.3. Если все элементы a_{kl} ряда (6.7) неотрицательны, то для его сходимости необходимо и достаточно, чтобы его частичные суммы были ограничены.

`Необходимость.` Очевидно, что если частичные суммы не ограничены, то не существует их предела при $n, m \to \infty$.

`Достаточность.` Из ограниченности множества $\{S_{mn}\}$ вытекает существование его точной верхней грани $S = \sup\{S_{mn}\}$. По определению точной верхней грани для любого $\varepsilon > 0$ найдется частичная сумма $S_{m_0 n_0}$ такая, что

$$S - \varepsilon < S_{m_0 n_0} \leq S. \tag{6.18}$$

Для всех номеров $m \geq m_0$, $n \geq n_0$ в силу неотрицательности членов ряда справедливо $S_{mn} \geq S_{m_0 n_0}$, откуда

$$S - \varepsilon < S_{mn} \leq S \tag{6.19}$$

для всех $m \geq m_0$, $n \geq n_0$, что и означает существование равного S предела частичных сумм, т.е. сходимость ряда (6.7).

7 Абсолютная сходимость двойного ряда. Взаимосвязь сходимости повторных, двойного и «одинарного» рядов.

7.1 Абсолютная сходимость двойного ряда.

Определение 7.1. Двойной ряд

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl} \tag{7.1}$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится двойной ряд

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}| \tag{7.2}$$

из модулей его членов.

Теорема 7.1. Если сходится двойной ряд (7.2), то двойной ряд (7.1) также сходится.

Доказательство. Пусть

$$p_{kl} = \frac{|a_{kl}| + a_{kl}}{2}, \quad q_{kl} = \frac{|a_{kl}| - a_{kl}}{2}. \tag{7.3}$$

Тогда, очевидно,

$$a_{kl} = p_{kl} - q_{kl}. \tag{7.4}$$

Оба p_{kl} и q_{kl} неотрицательны и не превосходят $|a_{kl}|$. Кроме того, из сходимости ряда (7.2) вытекает ограниченность его частичных сумм. Тогда и частичные суммы рядов

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} p_{kl} \text{ и } \sum_{k,l=1}^{\infty} q_{kl} \tag{7.5}$$

также ограничены. Но поскольку они состоят из неотрицательных членов, на основании критерия сходимости двойных рядов с неотрицательными членами, они сходятся к своим суммам P и Q, соответственно. Тогда двойной ряд (7.1) на основании (7.4) сходится к $P - Q$.

7.2 Взаимосвязь сходимости повторных, двойного и «одинарного» ряда.

Введем в рассмотрение еще один «одинарный» ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r, \tag{7.6}$$

членами которого являются занумерованные в произвольном порядке члены двойного ряда (7.1).

Теорема 7.2. Рассмотрим четыре ряда: два повторных ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}\right), \tag{7.7}$$

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}\right), \tag{7.8}$$

двойной ряд (7.1) и ряд вида (7.6). Если хотя бы один из этих рядов сходится при замене его членов на их модули, то все четыре указанных ряда сходятся и имеют одинаковые суммы.

`Доказательство.` Сразу же ограничимся рассмотрением лишь одного повторного ряда (7.7), так как для ряда (7.8) все рассуждения будут аналогичными с точностью до замены порядка следования индексов.

Докажем сначала, что если один из указанных рядов сходится при замене его членов на их модули, то сходятся остальные ряды. Разобъем доказательство этого пункта на три части.

1. Сходимость повторного ряда (7.7), члены которого заменены на их абсолютные величины, влечет абсолютную сходимость ряда (7.6). Обозначим через S^* сумму повторного ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|\right). \tag{7.9}$$

Тогда для всех m, n

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} |a_{kl}| \leq S^*. \tag{7.10}$$

Если теперь $S_r^* = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_r|$ — произвольная частичная сумма ряда

$$\sum_{r=1}^{\infty} |a_r|, \tag{7.11}$$

то можно найти такие значения для m и n, что все члены ряда (7.6), входящие в его r-тую частичную сумму, будут содержаться в первых m строках и первых n столбцах матрицы двойного ряда.

Но тогда в силу (7.10) $S_r^* \leq S^*$, но это и значит, что ряд с неотрицательными членами (7.11) сходится в силу критерия.

2. Абсолютная сходимость ряда (7.6) влечет абсолютную сходимость ряда (7.1). Итак, пусть ряд (7.11) сходится. Тогда последовательность его частичных сумм $\{S_r^*\}$ ограничена. Зафиксируем произвольную частичную сумму S_{mn}^* ряда из модулей (7.2). Заведомо можно выбрать номер r настолько

большим, что в S_r^* будут входить все члены ряда, которые входят в частичную сумму S_{mn}^*. Но тогда $S_{mn}^* \leq S_r^*$, а, значит, множество всех частичных сумм двойного ряда (7.2) ограничено, и ряд (7.2) сходится.

3. Абсолютная сходимость ряда (7.1) влечет сходимость ряда (7.7), члены которого заменены на их модули. Пусть сходится ряд (7.2). Для доказательства сходимости повторного ряда (7.9) достаточно показать, что для каждого k сходится ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|. \tag{7.12}$$

Для этого, в свою очередь, достаточно показать, что последовательность частичных сумм этих рядов ограничена. Но сумма

$$\sum_{l=1}^{n} |a_{kl}| \tag{7.13}$$

для всех n ограничена суммой двойного ряда из модулей.

Осталось доказать, что все три ряда из модулей сходятся к одной и той же сумме. Пусть S — сумма двойного ряда (7.1). Тогда в силу абсолютной сходимости и сумма «одинарного» ряда (7.6) равна S (т.к. любая перестановка элементов сходящегося абсолютно ряда сходится абсолютно к той же сумме, и всегда можно так переставить члены, что частичные суммы будут содержать в качестве подмножества частичные суммы двойного ряда). Сумма повторного ряда также равна S в силу того, что из сходимости семейства рядов (7.12) следует сходимость семейства

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}, \tag{7.14}$$

откуда повторный ряд сходится в силу теоремы о связи сходимости двойного и повторного ряда.

8 Обобщенные методы суммирования расходящихся рядов.

8.1 Общие характеристики обобщенных методов суммирования.

Определение 8.1. Метод суммирования называется *регулярным*, если ряд, сходящийся к сумме S в обычном смысле суммирования, сходится к ней же и в обобщенном смысле.

Определение 8.2. Метод суммирования называется *линейным*, если он обладает следующим свойством: для любого ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, имеющего обобщенную сумму U, для любого ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$, имеющего обобщенную сумму V, и для любых постоянных A и B ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (Au_k + Bv_k) \tag{8.1}$$

имеет обобщенную сумму $AU + BV$.

8.2 Метод суммирования Чезаро (метод средних арифметических).

Определение 8.3. Говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *суммируем методом Чезаро*, если существует предел при $n \to \infty$ средних арифметических сумм этого ряда:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{n}. \tag{8.2}$$

Предел (8.2) при этом называется *обобщенной в смысле Чезаро суммой* ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

Метод Чезаро является линейным и регулярным. Линейность очевидна сразу же. Перейдя к пределам при S_i в (8.2) (это можно сделать, т.к. по нашему предположению ряд сходится в обычном смысле, то есть существует при $n \to \infty$ предел S последовательности $\{S_n\}$), получим, что предел (8.2) существует и также равен S.

8.3 Метод суммирования Пуассона-Абеля.

Определение 8.4. По данному ряду $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ составим степенной ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = u_1 + u_2 x + u_3 x^2 + \ldots. \tag{8.3}$$

Если этот ряд сходится для всех x из интервала $0 < x < 1$, и если его сумма $S(x)$ имеет левый предел

$$S = \lim_{x \to 1-0} S(x) \tag{8.4}$$

в точке $x = 1$, то говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *суммируем методом Пуассона-Абеля*. Указанное предельное значение S называется *обобщенной в смысле Пуассона-Абеля суммой* ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

Опять же, линейность метода Пуассона-Абеля очевидна.

Утверждение 8.1. Метод суммирования Пуассона-Абеля обладает свойством регулярности.

Доказательство. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится в обычном смысле к своей сумме S. Тогда последовательность членов этого ряда бесконечно мала и, следовательно, ограничена некоторым числом M. Пусть x — произвольное фиксированное число из интервала $0 < x < 1$. Имеем

$$|u_k x^{k-1}| \leq M x^{k-1}. \tag{8.5}$$

Так как $x < 1$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$ сходится. Тогда по теореме сравнения рядов с неотрицательными членами сходится и ряд (8.3).

Пусть теперь S_n — n-ая частичная сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, а S — его сумма в обычном смысле. Используя преобразование Абеля, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k-1}. \tag{8.6}$$

Кроме того, очевидно,

$$S = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S x^{k-1}. \tag{8.7}$$

Вычитая из (8.7) (8.6), получим

$$S - \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1}, \tag{8.8}$$

или

$$S - S(x) = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1}, \tag{8.9}$$

где r_k — k-ый остаток ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$.

Необходимо показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое отвечающее ему $\delta > 0$, что $S - S(x) < \varepsilon$ как только $1 - \delta < x < 1$. Остаток r_k стремится к нулю при $k \to \infty$, поэтому для положительного числа $\frac{\varepsilon}{2}$ найдется такой номер k_0, что $|r_k| < \frac{eps}{2}$ для всех $k \geq k_0$. Тогда

$$\left| (1-x) \sum_{k=k_0}^{\infty} r_k x^{k-1} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \left| (1-x) \sum_{k=k_0}^{\infty} x^{k-1} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{8.10}$$

для x, достаточно близких к единице, т.к. сумма ограничена. Тогда существует указанный левый предел, и регулярность метода Пуассона-Абеля доказана.

8.4 Связь между обобщенной суммой в смысле Чезаро и в смысле Пуассона-Абеля.

Верно следующее утверждение[1].

Утверждение 8.2. Если ряд суммируем методом Чезаро, то он суммируем и методом Пуассона-Абеля, причем обобщенные суммы, полученные этими методами, совпадают.

Вместе с тем, существуют ряды, суммируемые методом Пуассона-Абеля, но не суммируемые по Чезаро.

[1] Ильин, Садовничий и Сендов его не доказывают; я, пожалуй, тоже воздержусь.

9 Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Критерий Коши.

9.1 Функциональные последовательности и ряды.

Определение 9.1. Пусть задано некоторое множество $\{x\}$. Если каждому числу n из натурального ряда ставится в соответствие по некоторому закону функция, определенная на множестве $\{x\}$, то множество занумерованных функций $\{f_n(x)\}$ будем называть *функциональной последовательностью*. Отдельные функции $f_n(x)$ будем называть *членами последовательности*, а множество $\{x\}$ — *областью определения* этой последовательности.

Определение 9.2. Пусть дана функциональная последовательность $\{u_n(x)\}$, определенная на множестве $\{x\}$. Формально написанную сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots \tag{9.1}$$

будем называть *функциональным рядом*. Отдельные функции $u_n(x)$ будем называть *членами ряда*, множество $\{x\}$ будем называть *областью определения* этого ряда.

9.2 Сходимость в точке и на множестве.

Определение 9.3. Пусть на множестве $\{x\}$ задана функциональная последовательность (ряд). Фиксируем произвольную точку x_0, принадлежащую множеству $\{x\}$, и рассмотрим все члены последовательности (ряда) в этой точке. Они, очевидно, образуют вполне конкретную числовую последовательность (ряд). Если указанная числовая последовательность (ряд) сходится, то говорят, что функциональная последовательность (ряд) *сходится в точке* x_0.

Определение 9.4. Множество всех точек x_0, в которых данная последовательность (ряд) сходится, называется областью сходимости этой последовательности (ряда).

Определение 9.5. Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ имеет в качестве области сходимости множество $\{x\}$. Совокупность пределов, взятых для всех точек x множества $\{x\}$, порождает множество всех значений вполне определенной функции $f(x)$, также определенной на множестве $\{x\}$. Эту функцию называют *предельной функцией* функциональной последовательности.

Определение 9.6. Пусть функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ имеет в качестве области сходимости множество $\{x\}$. На этом множестве определена функция $S(x)$, являющаяся предельной функцией последовательности частичных сумм этого ряда и называемая его *суммой*.

9.3 Равномерная сходимость на множестве.

Пусть функциональная последовательность

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \tag{9.2}$$

сходится на множестве $\{x\}$ к предельной функции $f(x)$.

Определение 9.7. Будем говорить, что указанная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ *равномерно на множестве* $\{x\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для всех $n \geq N$, и для всех точек x множества $\{x\}$ выполнено

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{9.3}$$

Определение 9.8. Функциональный ряд называется *равномерно сходящимся на множестве* $\{x\}$ к сумме $S(x)$, если последовательность его частичных сумм $\{S_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к предельной функции $S(x)$.

9.4 Критерий Коши равномерной сходимости последовательности и ряда.

Теорема 9.1 (критерий Коши равномерной сходимости последовательности). Для того, чтобы функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходилась равномерно на множестве $\{x\}$ к некоторой предельной функции, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашелся номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n \geq N$, всех натуральных p и всех $x \in \{x\}$ было бы выполнено

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon. \tag{9.4}$$

`Необходимость.` Предположим, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к предельной функции $f(x)$. Тогда, зафиксировав произвольное $\varepsilon > 0$, найдем для него номер N такой, что для всех $n \geq N$ и для всех точек x из $\{x\}$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.5}$$

Если p — любое натуральное число, то номер $n+p$ тем более будет удовлетворять неравенству $n + p \geq N$, а, значит, дополнительно, для всех натуральных p справедливо

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9.6}$$

С учетом того, что модуль суммы двух величин не превосходит суммы их модулей, получим

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |(f_{n+p}(x) - f(x)) + (f(x) - f_n(x))| \leq \\ \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \tag{9.7}$$

что и доказывает необходимость.

Достаточность. Пусть выполнено неравенство (9.4). Из этого неравенства и критерия Коши для числовой последовательности вытекает сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ в каждой точке x множества $\{x\}$, и, соответственно, существование в каждой такой точке предельной функции $f(x)$.

Фиксируем произвольный номер n такой, что $n \geq N(\varepsilon)$ и произвольную точку x множества $\{x\}$. Перейдем теперь в неравенстве (9.4) к пределу при $p \to \infty$. Получим, что для произвольного номера $n \geq N(\varepsilon)$, и произвольной точки $x \in \{x\}$ верно

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon < 2\varepsilon, \tag{9.8}$$

что и доказывает равномерную сходимость к функции $f(x)$ на множестве $\{x\}$.

Теорема 9.2 (критерий Коши равномерной сходимости ряда). Для того, чтобы функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходился равномерно на множестве $\{x\}$ к некоторой сумме, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашелся номер $N(\varepsilon)$, гарантирующий

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon \tag{9.9}$$

для всех $n \geq N(\varepsilon)$, всех натуральных p и всех x из $\{x\}$.

Доказательство. Достаточно заметить, что в левой части (9.9) под знаком модуля стоит разность $S_{n+p}(x)$ и $S_{n+1}(x)$. Тогда теорема 9.2 становится непосредственным следствием теоремы 9.1.

10 Признаки равномерной сходимости функциональных рядов.

10.1 Признак Вейерштрасса.

Теорема 10.1 (признак Вейерштрасса). Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ определен на множестве $\{x\}$, и существует сходящийся числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ такой, что для всех точек x множества $\{x\}$ и для всех номеров k справедливо неравенство

$$|u_k(x)| \leq c_k, \tag{10.1}$$

то функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$.

`Доказательство.` Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как числовой ряд (10.1) сходится, то в силу критерия Коши найдется N такое, что

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon \tag{10.2}$$

для всех $n \geq N$ и всех натуральных p.

Сопоставляя неравенства (10.1) и (10.2), получим

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon \tag{10.3}$$

для всех номеров $n \geq N$, всех натуральных p и всех $x \in \{x\}$. Тогда в силу критерия Коши равномерной сходимости ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$.

10.2 Признаки Абеля.

Определение 10.1. Последовательность $\{f_n(x)\}$ называется *равномерно ограниченной* на множестве $\{x\}$, если существует такое положительное число M, что для всех номеров n и всех точек x множества $\{x\}$ справедливо

$$|f_n(x)| \leq M. \tag{10.4}$$

Определение 10.2. Последовательность $\{v_n(x)\}$ называется *последовательностью с равномерно ограниченным на множестве $\{x\}$ изменением*, если функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| \tag{10.5}$$

равномерно сходится на множестве $\{x\}$.

Утверждение 10.1. Всякая последовательность $\{v_n(x)\}$, обладающая на множестве $\{x\}$ равномерно ограниченным изменением, равномерно сходится на этом множестве к некоторой предельной функции.

Доказательство. Из равномерной сходимости ряда (10.5) и критерия Коши следует, что вместе с (10.5) сходится равномерно на множестве $\{x\}$ и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(v_{k+1}(x) - v_k(x)\right), \tag{10.6}$$

n-ая частичная сумма которого имеет вид $S_n(x) = v_{n+1}(x) - v_1(x)$, откуда следует сходимость последовательности $\{v_n(x)\}$ к предельной функции $S(x) + v_1(x)$, где $S(x)$ — сумма ряда (10.6).

Теорема 10.2 (первый признак Абеля). Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ обладает равномерно ограниченной на $\{x\}$ последовательностью частичных сумм, а функциональная последовательность $\{v_n(x)\}$ обладает равномерно ограниченным на множестве $\{x\}$ изменением и имеет предельную функцию, тождественно равную нулю, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) v_n(x)] \tag{10.7}$$

равномерно сходится на множестве $\{x\}$.

Доказательство. По условию существует число $M > 0$ такое, что для всех номеров n и для всех $x \in \{x\}$ для последовательности частичных сумм $S_n(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ выполнено $|S_n(x)| \le M$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и по нему номер N такой, что для всех номеров $n \ge N$, всех натуральных p и всех $x \in \{x\}$ справедливы неравенства:

$$|v_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}, \tag{10.8}$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}. \tag{10.9}$$

Воспользовавшись тождеством Абеля

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1} \tag{10.10}$$

и сразу же учтя, что $|S_n(x)| \le M$ для всех номеров n, получим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x) v_k(x)] \right| \le M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| + \\ + M|v_{n+p}(x)| + M|v_{n+1}(x)|. \end{aligned} \tag{10.11}$$

Учитывая неравенства (10.8) и (10.9), получим

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x)v_k(x)] \right| < \varepsilon. \tag{10.12}$$

Теорема доказана.

Теорема 10.3 (второй признак Абеля). Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к сумме $S(x)$, ограниченной на этом множестве, а функциональная последовательность $\{v_n(x)\}$ обладает равномерно ограниченным на множестве $\{x\}$ изменением и имеет ограниченную на этом множестве предельную функцию $v(x)$, то функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x)v_n(x)] \tag{10.13}$$

равномерно сходится на множестве $\{x\}$.

Доказательство. Перепишем тождество Абеля (10.10) в следующем виде:

$$\begin{gathered} \sum_{k=n+1}^{n+p} [u_k(x)v_k(x)] = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(x)[v_k(x) - v_{k+1}(x)] + \\ + [S_{n+p}(x) - S_n(x)]v_{n+p}(x) + S_n(x)[v_{n+p}(x) - v_{n+1}(x)]. \end{gathered} \tag{10.14}$$

По условию сумма $S(x)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и предельная фуннкция $v(x)$ последовательности $\{v_n(x)\}$ ограничены на множестве $\{x\}$, поэтому найдутся такие числа M_1 и M_2, что для всех $x \in \{x\}$ справедливо

$$|S(x)| \le M_1, \quad |v(x)| \le M_2. \tag{10.15}$$

Отсюда и из условий равномерной сходимости последовательностей $\{S_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$ вытекает, что существует такой номер N_1, что для всех $n \ge N_1$ выполнены неравенства

$$|S_n(x)| \le M_1 + 1, \quad |v_n(x)| \le M_2 + 1. \tag{10.16}$$

Далее, из равномерной на множестве $\{x\}$ сходимости функциональных рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ и (10.6) и из критерия Коши вытекает, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся такие отвечающие ему N_2 и N_3, что для всех $n \ge N_2$ и всех натуральных p будет выполнено неравенство

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3(M_1 + 1)}, \tag{10.17}$$

и для всех $n \ge N_3$ и всех натуральных $p > 1$ будет выполнено неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3(M_1) + 1}. \tag{10.18}$$

Наконец, с учетом того, что

$$v_{n+p}(x) - v_n(x) = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} [v_{k+1}(x) - v_k(x)] \tag{10.19}$$

из неравенства (10.18) получаем

$$|v_{n+p}(x) - v_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3(M_1 + 1)} \tag{10.20}$$

для всех номеров $n \geq N_3$, всех натуральных p и всех $x \in \{x\}$.

Сопоставляя все полученные неравенства с переписанным тождеством Абеля, получим

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \right| < \varepsilon \tag{10.21}$$

при всех $n \geq N$ $(N = \max(N_1, N_2, N_3))$, всех натуральных p и всех x из множества $\{x\}$. В силу критерия Коши второй признак Абеля доказан.

10.3 Признак Дирихле-Абеля.

Теорема 10.4 (признак Дирихле-Абеля). Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ обладает равномерно ограниченной на множестве $\{x\}$ последовательностью частичных сумм, а функциональная последовательность $\{v_n(x)\}$ не возрастает в каждой точке множества $\{x\}$ и равномерно на этом множестве сходится к нулю, то функциональный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) v_n(x)] \tag{10.22}$$

равномерно сходится на множестве $\{x\}$.

`Доказательство.` Достаточно показать, что последовательность $\{v_n(x)\}$ обладает на множестве $\{x\}$ равномерно ограниченным изменением, но это действительно так, ибо n-ая частичная сумма $S_n(x)$ ряда (10.6) равна $v_1(x) - v_{n+1}(x)$. Поэтому существует предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} [v_1(x) - v_{n+1}(x)] = v_1(x), \tag{10.23}$$

и теорема доказана.

11 Признак Дини равномерной сходимости последовательности и ряда. Почленный переход к пределу. Непрерывность предельной функции функциональных последовательностей и рядов.

11.1 Признак Дини.

Теорема 11.1 (признак Дини для функциональной последовательности). Если последовательность $\{f_n(x)\}$ не убывает (или не возрастает) в каждой точке x замкнутого ограниченного множества $\{x\}$ и сходится на этом множестве к предельной функции $f(x)$, и все члены последовательности $\{f_n(x)\}$ и предельная функция $f(x)$ непрерывны на множестве $\{x\}$, то сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ равномерна на множестве $\{x\}$.

Доказательство. Пусть, для определенности, последовательность $\{f_n(x)\}$ не убывает на замкнутом ограниченном множестве $\{x\}$. Пусть $r_n = f(x) - f_n(x)$. Последовательность $\{r_n(x)\}$ обладает следующими тремя свойствами: все r_n неотрицательны и непрерывны на множестве $\{x\}$; $\{r_n(x)\}$ не возрастает на множестве $\{x\}$; в каждой точке x множества $\{x\}$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0. \tag{11.1}$$

Для доказательства признака Дини достаточно показать, что последовательность $\{r_n(x)\}$ сходится к тождественному нулю равномерно на множестве $\{x\}$, т.е. что для любого $\varepsilon > 0$ найдется хотя бы один такой номер n, что $r_n(x) < \varepsilon$ для всех x из множества $\{x\}$. Допустим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ такой номер найти не удастся. Тогда для любого номера n найдется такая точка x_n множества $\{x\}$, чтоъ

$$r_n(x_n) \geq \varepsilon. \tag{11.2}$$

В силу ограниченности множества $\{x\}$ и теорема Больцано-Вейерштрасса, из последовательности точек $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность точек $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in \{x\}$ (в силу замкнутости и ограниченности множества $\{x\}$). Так как каждая из функций $r_m(x)$ в точке x_0 непрерывна, то для всех m

$$\lim_{k\to\infty} r_m(x_{n_k}) = r_m(x_0). \tag{11.3}$$

С другой стороны, выбрав для номера m превосходящий его номер n_k, получим

$$r_m(x_{n_k}) \geq r_{n_k}(x_{n_k}). \tag{11.4}$$

Сопоставление этого последнего неравенства с неравенством (11.2) дает

$$r_m(x_{n_k}) \geq \varepsilon \tag{11.5}$$

для всех номеров n_k, превосходящих выбранный нами произвольный номер m.

Учтя равенство (11.3), получим

$$r_m(x_0) \geq \varepsilon \tag{11.6}$$

для всех номеров m, но это противоречит сходимости последовательности $\{r_m(x)\}$ в точке x_0 к нулю. Полученное противоречие доказывает теорему.

Теорема 11.2 (признак Дини для функционального ряда). Если все члены функционального ряда непрерывны и неотрицательны (или неположительны) на замкнутом ограниченном множестве $\{x\}$, и если в каждой точке множества $\{x\}$ этот ряд сходится и его сумма является непрерывной на множестве $\{x\}$ функцией, то его сходимость является равномерной на $\{x\}$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть последовательность частичных сумм этого ряда. Для нее выполнены все условия признака Дини для функциональной последовательности, в силу чего она сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к своей предельной функции, т.е. к сумме ряда.

11.2 Почленный переход к пределу.

Рассмотрим произвольную точку x_0 и произвольное множество $\{x\}$, для которого эта точка является предельной. Сама точка при этом не обязана принадлежать $\{x\}$.

Теорема 11.3. Если функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{11.7}$$

сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к своей сумме $S(x)$, и у всех членов этого ряда существует в точке x_0 предел

$$\lim_{x \to x_0} u_k(x) = b_k, \tag{11.8}$$

то и сумма $S(x)$ имеет в точке x_0 предел, причем

$$\lim_{x \to x_0} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\lim_{x \to x_0} u_k(x) \right] = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \tag{11.9}$$

т.е. к пределу можно переходить *почленно*.

Доказательство. Сначала докажем сходимость числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. В силу критерия Коши, примененного к функциональному ряду (11.7), для любого положительного ε найдется отвечающий ему номер N такой, что для всех $n \geq N$, для всех натуральных p и для всех $x \in \{x\}$ справедливо

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon. \tag{11.10}$$

Фиксируя в предыдущем неравенстве номера n и p и переходя к пределу при $x \to x_0$, получим

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \ldots + b_{n+p}| \leq \varepsilon < 2\varepsilon. \tag{11.11}$$

Тогда по критерию Коши ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится.

Теперь оценим разность

$$S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \tag{11.12}$$

в точках x множества $\{x\}$ из достаточно малой окрестности точки x_0. Поскольку

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \tag{11.13}$$

для всех точек x множества $\{x\}$, то для любого номера n выполнено

$$S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \left[\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k\right] + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k, \tag{11.14}$$

откуда следует

$$\left|S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right|. \tag{11.15}$$

Фиксируем произвольное положительное ε. Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$, найдется номер n такой, что для всех точек $x \in \{x\}$ будет справедливо

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k\right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{11.16}$$

Так как предел конечной сумме равен сумме пределов слагаемых (если они существуют, а в нашем случае это так), то для выбранного ε можно указать такое $\delta > 0$, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x) - \sum_{k=1}^{n} b_k\right| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{11.17}$$

для всех $x \in \{x\}$, удовлетворяющих условию $0 < \rho(x, x_0) < \delta$. С учетом всех выписанных неравенств, для каждого из таких x справедливо

$$\left|S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k\right| < \varepsilon, \tag{11.18}$$

что доказывает существование в точке $x = x_0$ предела функции $S(x)$, равного $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Теорема доказана.

Доказанную только что теорему можно переформулировать и в терминах функциональных последовательностей.

Теорема 11.4. Если функциональная последовательность $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$n сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к предельной функции $f(x)$, и все элементы этой последовательности имеют предел в точке $x = x_0$, то и предельная функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, причем

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left[\lim_{n \to \infty} f_n(x) \right] = \lim_{n \to \infty} \left[\lim_{x \to x_0} f(x) \right], \tag{11.19}$$

что означает возможность *почленного перехода к пределу* при $x \to x_0$.

`Доказательство` предполагает рассмотрение ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[f(n) - f(n-1) \right], \tag{11.20}$$

где дополнительно положено $f(0) = 0$. n-ый член данного ряда совпадает с n-ым членом последовательности, и для него выполнены все условия предыдущей теоремы.

11.3 Непрерывность предельной функции функциональных последовательностей и рядов.

Существует два важных следствия из доказанной теоремы о предельном переходе.

Следствие 1. Если в условиях теоремы 11.3 дополнительно потребовать, чтобы точка x_0 принадлежала множеству $\{x\}$ и чтобы все члены $u_k(x)$ функционального ряда были непрерывны в точке x_0, то и сумма $S(x)$ будет непрерывна в точке x_0.

`Доказательство.` В самом деле, в этом случае $b_k = u_k(x_0)$ и

$$\lim_{x \to x_0} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x_0) = S(x_0), \tag{11.21}$$

что и означает непрерывность суммы $S(x)$ в точке x_0.

Определение 11.1. Множество $\{x\}$ называется *плотным в себе множеством*, если каждая точка $x \in \{x\}$ является предельной точкой для $\{x\}$.

Следствие 2. Если все члены функционального ряда (функциональной последовательности) непрерывны на плотном в себе множестве $\{x\}$, то и сумма ряда (предельная функция последовательности) непрерывна на множестве $\{x\}$.

`Доказательство` заключается в применении предыдущей теоремы к каждой точке x_0 множества $\{x\}$.

12 Почленное дифференцирование. Существование первообразных функций для функциональных последовательностей и рядов.

12.1 Почленное дифференцирование.

Сразу же договоримся под словами «функция $f(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ производную» подразумевать, что функция имеет двустороннюю производную во всех внутренних точках сегмента и односторонние производные в точках $x = a$ и $x = b$ (соответственно, правую и левую).

Теорема 12.1. Если каждая из функций $f_n(x)$ имеет производную на сегменте $[a, b]$, причем последовательность производных равномерно на этом сегменте сходится, а сама последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится хотя бы в одной точке x_0 сегмента, то она (эта последовательность) сходится к некоторой предельной функции $f(x)$ равномерно на $[a, b]$, причем эту последовательность можно дифференцировать *почленно*, т.е. всюду на $[a, b]$ предельная функция имеет производную $f'(x)$, являющуюся предельной функцией последовательности $\{f'_n(x)\}$.

Доказательство. Докажем сначала, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на сегменте $[a, b]$. Из сходимости числовой последовательности $\{f_n(x_0)\}$ и равномерной на сегменте $[a, b]$ сходимости последовательности производных следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n \geq N$, всех натуральных p и всех $x \in [a, b]$ справедливо

$$|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{12.1}$$

Пусть x — произвольная точка сегмента $[a, b]$. Для функции $[f_{n+p}(t) - f_n(t)]$ при любых фиксированных n и p на сегменте, заключенном между x и x_0 выполнены все условия теоремы Лагранжа, поэтому между этими точками найдется точка ξ такая, что

$$[f_{n+p}(x) - f_n(x)] - [f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)] = [f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)](x - x_0). \tag{12.2}$$

Отсюда, учитывая также неравенства (12.1) и тождество $|x - x_0| \leq b - a$, получим

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \tag{12.3}$$

для любого x из множества $[a, b]$, любого $n \geq N$ и любого натурального p. Это, в силу критерия Коши, и означает, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на сегменте $[a, b]$ к некоторой предельной функции $f(x)$.

Снова фиксируем произвольную точку x сегмента $[a, b]$ и по ней $\delta > 0$ такое, чтобы δ-окрестность точки x целиком содержалась в $[a, b]$ (в случае граничных точек будем рассматривать соответствующие полуокрестности). Обозначим через $\{\Delta x\}$ множество всех чисел Δx, удовлетворяющих условию

$0 < |\Delta x| < \delta$ при $a < x < b$; условию $0 < \Delta x < \delta$ при $x = a$; и условию $-\delta < \Delta x < 0$ при $x = b$. Докажем, что последовательность функций аргумента Δx

$$\varphi_n(\Delta x) = \frac{f_n(x + \Delta x) - f_n(x)}{\Delta x} \tag{12.4}$$

сходится равномерно на множестве $\{\Delta x\}$.

Для произвольно выбранного $\varepsilon > 0$ в силу критерия Коши для равномерной сходимости последовательности производных, найдется номер N такой, что

$$|f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \varepsilon \tag{12.5}$$

для всех номеров $n > N$, всех натуральных p и всех точек x из $[a, b]$.

Фиксируем теперь произвольное Δx из множества $\{\Delta x\}$ и применим при фиксированных n и p к функции $|f_{n+p}(t) - f_n(t)|$ теорему Лагранжа по сегменту, ограниченному точками x и $x + \Delta x$. Согласно этой теореме найдется число θ такое, что

$$\begin{aligned} \frac{[f_{n+p}(x + \Delta x) - f_n(x + \Delta x)] - [f_{n+p}(x) - f_n(x)]}{\Delta x} &= \\ = f'_{n+p}(x + \theta\Delta x) - f'n(x + \theta\Delta x). \end{aligned} \tag{12.6}$$

В обозначениях (12.4) последнее равенство принимает вид

$$\varphi_{n+p}(\Delta x) - \varphi_n(\Delta x) = f'_{n+p}(x + \theta\Delta x) - f'n(x + \theta\Delta x). \tag{12.7}$$

Из этого равенства и (12.5) делаем вывод, что

$$|\varphi_{n+p}(\Delta x) - \varphi_n(\Delta x)| < \varepsilon \tag{12.8}$$

для любого Δx из множества $\{\Delta x\}$, любого $n \geq N$, и любого натурального p. В силу критерия Коши последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве $\{\Delta x\}$. Применим тогда к ней теорему о почленном предельном переходе в точке $\Delta x = 0$. Согласно этой теореме, функция

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \tag{12.9}$$

являющаяся предельной функцией последовательности из членов вида (12.4), имеет в точке $\Delta x = 0$ предел, и его можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\lim_{n \to \infty} \varphi_n(\Delta x)\right] = \\ = \lim_{n \to \infty} \left[\lim_{\Delta x \to 0} \varphi_n(\Delta x)\right] &= \lim_{n \to \infty} f'_n(x). \end{aligned} \tag{12.10}$$

Это и доказывает, что производная предельной функции $f(x)$ в точке x существует и равна пределу $f'_n(x)$ при $n \to \infty$. Теорема полностью доказана.

В терминах функциональных рядов теорема о почленном дифференицровании звучит так.

Теорема 12.2. Если каждая из функций $u_k(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ производную, и если ряд производных сходится равномерно на этом сегменте, а сам ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится хотя бы в одной точке x_0 сегмента, то этот ряд сходится равномерно на сегменте $[a, b]$, и его сумма $S(x)$ имеет производную, равную сумме ряда из производных $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$.

12.2 Существование первообразных функций для функциональных последовательностей и рядов.

Из теоремы 12.1 существует важное следствие.

Теорема 12.3. Если каждая функция $f_n(x)$ имеет первообразную на сегменте $[a, b]$, и если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на сегменте $[a, b]$ к предельной функции $f(x)$, то и предельная функция имеет первообразную на сегменте $[a, b]$. Более того, если x_0 — любая точка сегмента $[a, b]$, то последовательность первообразных $\Phi_n(x)$ функций $f_n(x)$, удовлетворяющих условию $\Phi_n(x_0) = 0$, сходится равномерно на сегменте $[a, b]$ к первообразной $\Phi(x)$ предельной функции $f(x)$, удовлетворяющей условию $\Phi(x_0) = 0$.

`Доказательство.` Для последовательности первообразных $\Phi_n(x)$, удовлетворяющих требованию $\Phi_n(x_0) = 0$ выполнены все условия теоремы 12.1, что обеспечивает равномерную на $[a, b]$ сходимость последовательности $\{\Phi_n(x)\}$ к предельной функции $\Phi(x)$, у которой в каждой точке сегмента $[a, b]$ существует производная, равная предельной функции последовательности $\{f_n(x)\}$.

Можно сформулировать эквивалентное утверждение для функционального ряда[2].

Теорема 12.4. Если каждая функция $u_k(x)$ имеет первообразную на сегменте $[a, b]$, и если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на сегменте $[a, b]$ к сумме $S(x)$, то и сумма $S(x)$ имеет на сегменте $[a, b]$ первообразную. Если дополнительно x_0 — любая точка сегмента $[a, b]$, то ряд, состоящий из первообразных $U_k(x)$ функций $u_k(x)$, для которых $U_k(x_0) = 0$, сходится равномерно на сегменте $[a, b]$ к первообразной $\Phi(x)$ суммы $S(x)$, удовлетворяющей условию $\Phi(x_0) = 0$.

[2] В Ильине, Садовничем, Сендове его, что странно, нет.

13 Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов. Сходимость в среднем. Связь с равномерной сходимостью.

13.1 Почленное интегрирование функциональных последовательностей и рядов.

Теорема 13.1. Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к предельной функции $f(x)$ равномерно на сегменте $[a, b]$, и если каждая функция $f_n(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b]$, то и предельная функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, причем возможно *почленное интегрирование*, т.е. предел

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx \tag{13.1}$$

существует и равен

$$\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{13.2}$$

Доказательство. Докажем сначала, что предельная функция интегрируема на сегменте $[a, b]$. Фиксируем произвольное положительное число ε. Достаточно доказать, что для предельной функции $f(x)$ найдется хотя бы одно разбиение сегмента $[a, b]$, для верхней суммы S и нижней суммы s которого справедливо неравенство $S - s < \varepsilon$. Для этого, в свою очередь, достаточно доказать, что для нашего $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n, что для любого разбиения сегмента $[a, b]$ верхняя сумма S и нижняя сумма s функции $f(x)$ и верхняя сумма S_n и нижняя сумма s_n функции $f_n(x)$ связаны неравенством

$$S - s \le (S_n - s_n) + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13.3}$$

Рассмотрим произвольное разбиение $\{x_k\}$ $(k = 1, 2, \dots, m)$ сегмента $[a, b]$, и обозначим символом $\omega_k(f_n)$ колебание (то есть разность между точной верхней и точной нижней гранию) на k-м частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ функции $f_n(x)$, а символом $\omega_k(f)$ — колебание на том же частичном сегменте предельной функции $f(x)$. Неравенство (13.3) будет доказано, если мы установим, что для достаточно большого номера n справедливо неравенство

$$\omega_k(f) \le \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{13.4}$$

Установив этот факт, каждое из неравенств (13.4) мы можем домножить на длину k-го частчного сегмента, и сложить полученные неравенства. Результатом явится выражение (13.3).

Для любого номера n и любых двух точек x', x'', принадлежащих сегменту $[x_{k-1}, x_k]$, справедливо тождество

$$f(x') - f(x'') = [f(x') - f_n(x')] + [f_n(x') - f_n(x'')] + [f_n(x'') - f(x'')], \quad (13.5)$$

откуда

$$|f(x') - f(x'')| \le |f(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x'')| + |f_n(x'') - f(x'')|. \quad (13.6)$$

В силу равномерной на сегменте $[a, b]$ сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$, для фиксированного произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер n такой, что для всех точек x сегмента $[a, b]$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \quad (13.7)$$

Подставляя последнее неравенство в предпоследнее, получим

$$|f(x') - f(x'')| \le |f_n(x') - f_n(x'') + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \quad (13.8)$$

Помимо этого, при любом расположении двух точек x' и x'' на сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ справедливо неравенство

$$|f_n(x') - f_n(x'')| \le \omega_k(f_n), \quad (13.9)$$

поэтому

$$|f(x') - f(x'')| \le \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \quad (13.10)$$

Обозначая точную верхнюю и нижнюю грани функции $f(x)$ на частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$ соответственно как M_k и m_k, в силу определения точных граней найдем последовательности точек $\{x'_p\}$ и $\{x''_p\}$ сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ такие, что

$$\lim_{p\to\infty} x'_p = M_k, \quad \lim_{p\to\infty} x''_p = m_k. \quad (13.11)$$

Тогда для любого номера p

$$|f(x'_p) - f(x''_p)| \le \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \quad (13.12)$$

что после предельного перехода при $p \to \infty$ обращается в (13.4) и, таким образом, доказывает интегрируемость предельной функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Для доказательства возможности почленного интегрирования нужно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n \ge N$

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| < \varepsilon. \quad (13.13)$$

В силу равномерной сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ существует номер N такой, что для всех $x \in [a,b]$ и для всех номеров $n \geq N$ справедливо

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{13.14}$$

Тогда

$$\begin{gathered}\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| = \left|\int_a^b \left[f_n(x) - f(x)\right]dx\right| \leq \\ \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.\end{gathered} \tag{13.15}$$

Доказательство теоремы завершено.

Подобная теорема существует и для функциональных рядов.

Теорема 13.2. Если функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно к своей сумме $S(x)$ на сегменте $[a,b]$, и каждый член $u_k(x)$ ряда интегрируем на сегменте $[a,b]$, то и сумма $S(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$, и возможно *почленное интегрирование*, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)dx = \int_a^b S(x)dx. \tag{13.16}$$

13.2 Сходимость в среднем.

Пусть каждая функция $f_n(x)$ из функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ интегрируемы на сегменте $[a,b]$. Тогда функция

$$[f_n(x) - f(x)]^2 = f_n^2(x) - 2f_n(x)f(x) + f^2(x) \tag{13.17}$$

также будет являться интегрируемой на $[a,b]$ как суперпозиция интегрируемых функций.

Определение 13.1. Будем говорить, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ *сходится в среднем* на сегменте $[a,b]$ к предельной функции $f(x)$, если существует равный нулю предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left[f_n(x) - f(x)\right]^2 dx = 0. \tag{13.18}$$

Определение 13.2. Будем говорить, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *сходится в среднем* на сегменте $[a,b]$ к сумме $S(x)$, если последовательность частичных сумм этого ряда сходится в среднем на сегменте $[a,b]$ к предельной функции $S(x)$.

13.3 Связь между сходимостью в среднем и равномерной сходимостью.

Утверждение 13.1. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на сегменте $[a,b]$, то она сходится к $f(x)$ на этом сегменте и в среднем.

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Для него найдется номер N такой, что для всех $n \geq N$ и всех $x \in [a,b]$ справедливо

$$|f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}. \tag{13.19}$$

Но тогда, перейдя к модулю под знаком интеграла, получим

$$\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \tag{13.20}$$

что выполнено для всех номеров n, больших или равных N, что и означает сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ на сегменте $[a,b]$ в среднем.

Утверждение 13.2. Сходимость последовательности на сегменте в среднем не влечет не только равномерной сходимости, но даже и сходимости хотя бы в одной точке сегмента.

Доказательство. Рассмотрим следующую последовательность сегментов, принадлежащих $[0,1]$:

$$\begin{gathered} I_1 = [0,1], \\ I_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right], \ I_3 = \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ I_4 = \left[0, \frac{1}{4}\right], \ I_5 = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \ I_6 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \ I_7 = \left[\frac{3}{4}, 1\right], \\ \vdots \\ I_{2^n} = \left[0, \frac{1}{2^n}\right], \ I_{2^n+1} = \left[\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}\right], \ \ldots, \ I_{2^{n+1}-1} = \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1\right], \\ \vdots \end{gathered}$$

Определим теперь n-ый член функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ следующим образом:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{на сегменте } I_n, \\ 0 & \text{во всех остальных точках .} \end{cases} \tag{13.21}$$

Последовательность $\{f_n(x)\}$, очевидно, сходится в среднем на сегменте $[0,1]$

к предельной функции $f(x) = 0$:

$$\int_0^1 [f_n(x) - f(x)]^2 dx = \int_{I_n} dx = |I_n|, \tag{13.22}$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0. \tag{13.23}$$

Теперь убедимся, что $\{f_n(x)\}$ не сходится ни в одной точке сегмента $[0, 1]$. Какую бы точку $x_0 \in [0, 1]$ мы не выбрали, среди сколь угодно больших номеров n найдутся как такие, для которых сегмент I_n содержит точку x_0, так и такие, для которых не содержит. Тогда последовательность содержит бесконечно много членов, равных единице, и бесконечно много членов, равных нулю, а, следовательно, расходится.

13.4 Сходимость в среднем и почленное интегрирование.

Теорема 13.3. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, то эту последовательность можно почленно интегрировать на $[a, b]$, т.е. предел

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x) dx \tag{13.24}$$

существует и равен

$$\int_a^b f(x) dx. \tag{13.25}$$

`Доказательство.` Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу сходимости в среднем, найдется номер N такой, что для всех $n \geq N$ и всех $x \in [a, b]$ выполнено

$$\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{b - a}. \tag{13.26}$$

Введем обозначения

$$A = [f_n(x) - f(x)]\sqrt{\frac{b-a}{\varepsilon}}, \quad B = \sqrt{\varepsilon} b - a \tag{13.27}$$

и воспользуемся очевидным тождеством

$$|A||B| \leq \frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2}, \tag{13.28}$$

тогда

$$|f_n(x) - f(x)| \leq [f_n(x) - f(x)]^2 \frac{b-a}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}, \tag{13.29}$$

откуда

$$\int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{b-a}{2\varepsilon} \int\limits_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13.30}$$

С учетом (13.26) получим, что для всех $n \geq N$ справедливо

$$\int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \tag{13.31}$$

откуда, в свою очередь,

$$\left| \int\limits_a^b f_n(x) dx - \int\limits_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon \tag{13.32}$$

для всех $n \geq N$. Теорема доказана.

14 Теорема Арцела. Признак равностепенной непрерывности функциональной последовательности.

14.1 Равностепенная непрерывность.

Пусть задана функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$, определенная на некотором *плотном в себе* множестве $\{x\}$.

Определение 14.1. Последовательность $\{f_n(x)\}$ называется *равностепенно непрерывной на множестве* $\{x\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon \tag{14.1}$$

справедливо для всех номеров n и всех точек x', x'' множества $\{x\}$, для которых $\rho(x', x'') < \delta$.

14.2 Теорема Арцела.

Теорема 14.1 (теорема Арцела). Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна и равномерно ограничена на сегменте $[a, b]$, то из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно на сегменте $[a, b]$.

`Доказательство.` Рассмотрим на сегменте $[a, b]$ последовательность точек $\{x_n\}$ особого вида: в качестве x_1 возьмем серединную точку сегмента, в качестве x_2 и x_3 возьмем две точки, которые совместно с x_1 разделят сегмент на четыре равных части и так далее по степеням двойки. Построенная таким образом последовательность обладает следующим свойством: для любого $\delta > 0$ найдется номер n_0 такой, что на любом принадлежащем $[a, b]$ сегменте длины δ лежит хотя бы один из элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$. Такая последовательность называется *всюду плотной* на сегменте $[a, b]$.

Рассмотрим сначала последовательность $\{f_n(x)\}$ в точке x_1, в результате чего получим ограниченную числовую последовательность, из которой, по теореме Больцано-Вейерштрасса, можно выделить сходящуюся подпоследовательность, которую мы обозначим

$$f_{11}(x_1), f_{12}(x_1), \ldots, f_{1n}(x_1), \ldots \tag{14.2}$$

Далее рассмотрим функциональную последовательность

$$f_{11}(x), f_{12}(x), \ldots, f_{1n}(x), \ldots \tag{14.3}$$

в точке x_2. По теореме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выделить новую сходящуюся подпоследовательность

$$f_{21}(x_2), f_{22}(x_2), \ldots, f_{2n}(x_2), \ldots \tag{14.4}$$

откуда

$$f_{21}(x), f_{22}(x), \ldots, f_{2n}(x), \ldots, \tag{14.5}$$

которая сходится как в точке x_1, так и в точке x_2. Продолжая аналогичные рассуждения, на каждом шаге будем получать последовательность

$$f_{n1}(x), f_{n2}(x), \ldots, f_{nn}(x), \ldots, \tag{14.6}$$

сходяющуюся в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Рассмотрим теперь «диагональную» последовательность

$$f_{11}(x), f_{22}(x), \ldots, f_{nn}(x), \ldots \tag{14.7}$$

и докажем, что она равномерно сходится на сегменте $[a, b]$. Будем в дальнейшем для сокращения записи обозначать эту последовательность

$$g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x), \ldots. \tag{14.8}$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\{g_n(x)\}$ является равностепенно непрерывной на $[a, b]$ последовательностью (поскольку является подпоследовательностью исходной равностепенно непрерывной последовательности $\{f_n(x)\}$), то для данного ε найдется такое $\delta > 0$, что каковы бы ни были точки x и x_m из сегмента $[a, b]$, связанные неравенством $|x - x_m| < \delta$, для всех номеров n окажется верным

$$|g_n(x) - g_n(x_m)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{14.9}$$

Разобъем теперь сегмент $[a, b]$ на конечное число сегментов с длинами, меньшими δ. Из последовательности $\{x_n\}$ выберем первые n_0 членов так, чтобы в каждом из отрезков разбиения содержался хотя бы один из выбранных членов. Как показано выше, последовательность $\{g_n(x)\}$ сходится во всех точках $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$. Поэтому для указанного числа ε найдется номер N такой, что для всех $n \geq N$, всех натуральных p и всех $m = 1, 2, \ldots, n_0$ выполнено

$$|g_{n+p}(x_m) - g_n(x_m)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{14.10}$$

Пусть, наконец, x — произвольная точка сегмента $[a, b]$. Эта точка обязательно лежит в одном из отрезков разбиения, поэтому для нее найдется хотя бы одна точка x_m такая, что $|x - x_m| < \delta$. В силу того, что модуль суммы трех величин не превышает сумму их модулей, можно записать

$$\begin{gathered} |g_{n+p}(x) - g_n(x)| \leq |g_{n+p}(x) - g_{n+p}(x_m)| + \\ + |g_{n+p}(x_m) - g_n(x_m)| + |g_n(x_m) - g_n(x)|. \end{gathered} \tag{14.11}$$

Оценивая правую часть с помощью (4.9) и (4.10), получим, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для всех $n \geq N$, всех натуральных p и всех x из $[a, b]$

$$|g_{n+p}(x) - g_n(x)| < \varepsilon. \tag{14.12}$$

Теорема доказана.

14.3 Признак равностепенной непрерывности функциональной последовательности.

Теорема 14.2 (достаточный признак равностепенной непрерывности). Если последовательность $\{f_n(x)\}$ состоит из дифференцируемых на сегменте $[a, b]$ функций, и если последовательность производных $\{f_n'(x)\}$ равномерно ограничена на этом сегменте, то последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. Возьмем на сегменте $[a, b]$ две произвольные точки x' и x'' и запишем для функции $f_n(x)$ на сегменте $[x', x'']$ теорему Лагранжа: найдется такая лежащая между x' и x'' точка ξ_n, что

$$|f_n(x') - f_n(x'')| = |f_n'(\xi_n)||x' - x''|. \tag{14.13}$$

Поскольку последовательность производных равномерно ограничена на сегменте $[a, b]$, найдется такое число $M > 0$, что для всех номеров n

$$|f_n'(\xi_n)| < M, \tag{14.14}$$

откуда

$$|f_n(x') - f_n(x'')| = M|x' - x''|. \tag{14.15}$$

Фиксируем теперь произвольное положительное ε. Взяв $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, получим, что для всех номеров n и для всех x' и x'' из сегмента $[a, b]$, для которых $|x' - x''| < \delta$, будет справедливо

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon. \tag{14.16}$$

Равностепенная непрерывность последовательности $\{f_n(x)\}$ доказана.

15 Степенные ряды. Теорема Коши-Адамара. Непрерывность суммы, почленное интегрирование и дифференцирование степенного ряда. Разложение функций в степенные ряды.

15.1 Определение степенного ряда.

Определение 15.1. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \tag{15.1}$$

где $a_0, a_1, \ldots$ — постоянные вещественные числа, называемые *коэффициентами* ряда.

Утверждение 15.1. Всякий степенной ряд сходится в точке $x = 0$. Существуют степенные ряды, сходящиеся только в этой точке, например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$.

15.2 Теорема Коши-Адамара.

Составим из коэффициентов ряда (15.1) последовательность

$$\left\{ \sqrt[n]{|a_n|} \right\}. \tag{15.2}$$

Возможны два варианта: либо последовательность (15.2) ограничена, либо нет. Если последовательность (15.2) ограничена, то у нее существует конечный верхний предел, который мы обозначим, как L. Сразу заметим, что $L \geq 0$, т.к. все элементы последовательности (15.2) неотрицательны.

Теорема 15.1 (теорема Коши-Адамара). Если последовательность (15.2) не ограничена, то степенной ряд (15.1) сходится только при $x = 0$; если последовательность (15.2) ограничена и имеет верхний предел $L > 0$, то степенной ряд (15.1) абсолютно сходится для значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| < \frac{1}{L}$ и расходится для значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| > \frac{1}{L}$; если последовательность (15.2) ограничена и имеет верхний предел $L = 0$, то ряд (15.1) абсолютно сходится для всех значений x.

Доказательство. 1. Пусть последовательность (15.2) не ограничена. Тогда для всех $x \neq 0$ последовательность

$$|x| \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|a_n x^n|} \tag{15.3}$$

также не ограничена, и у нее имеются члены со сколь угодно большими номерами n, для которых $\sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$, т.е. $|a_n x^n| > 1$. Но тогда для ряда (15.1) нарушено необходимое условие сходимости, а именно стремление к нулю его общего члена, что означает сходимость только в точке $x = 0$.

2. Пусть теперь последовательность (15.2) ограничена, и ее верхний предел равен L. Фиксируем любое x, для которого $|x| < \frac{1}{L}$. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что $|x| < \frac{1}{L+\varepsilon}$. В силу свойств верхнего предела все элементы последовательности (15.2), начиная с некоторого номера n, удовлетворяют неравенству

$$\sqrt[n]{|a_n|} < L + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{15.4}$$

Таким образом, начиная с этого номера n выполнено

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{L + \varepsilon/2}{L + \varepsilon} < 1, \tag{15.5}$$

т.е. ряд (15.1) абсолютно сходится по признаку Коши.

Теперь фиксируем любое x, для которого $|x| > \frac{1}{L}$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $|x| > \frac{1}{L-\varepsilon}$. По определению верхнего предела из последовательности (15.2) можно выделить сходящуюся к L подпоследовательность

$$\left\{ \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \right\}. \tag{15.6}$$

Отсюда, начиная с некоторого k, справедливо

$$L - \varepsilon < \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} < L + \varepsilon \tag{15.7}$$

и

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k} x^{n_k}|} = |x| \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{L - \varepsilon}{L - \varepsilon} = 1, \tag{15.8}$$

т.е.

$$|a_{n_k} x^{n_k}| > 1, \tag{15.9}$$

и необходимое условие сходимости ряда (15.1) нарушено.

3. Пусть последовательность (15.2) ограничена и ее верхний предел $L = 0$. Фиксируем произвольное $x \neq 0$. Поскольку верхний предел $L = 0$, и последовательность (15.2), состоящая из неотрицательных членов, не может иметь отрицательных предельных точек, то $L = 0$ — единственная предельная точка, а, следовательно, и предел этой последовательности, т.е. последовательность (15.2) бесконечно малая. Тогда для положительного числа

$$\frac{1}{2|x|} \tag{15.10}$$

найдется номер n, начиная с которого

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|x|} \tag{15.11}$$

и, следовательно,

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2} < 1, \tag{15.12}$$

т.е. ряд (15.1) абсолютно сходится по признаку Коши.

Только что доказанная теорема приводит нас к следующему фундаментальному утверждению.

Утверждение 15.2. Для каждого степенного ряда (15.1), если только он не является рядом, сходящимся лишь в точке $x = 0$, существует положительное число R (возможно, равное бесконечности) такое, что этот ряд сходится абсолютно при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$. Это число R называется *радиусом сходимости*, а интервал $(-R, +R)$ называется *промежутком сходимости* данного ряда. Для вычисления радиуса сходимости используется формула

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{15.13}$$

15.3 Непрерывность суммы степенного ряда.

Пусть степенной ряд (15.1) имеет радиус сходимости $R > 0$.

Утверждение 15.3. Каково бы ни было положительное число r, удовлетворяющее условию $r < R$, ряд (15.1) равномерно сходится на сегменте $[-r, +r]$.

Доказательство. По теореме 15.1 ряд (15.1) абсолютно сходится при $x = r$, т.е. сходится ряд

$$|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n. \tag{15.14}$$

Этот числовой ряд будет мажорировать степенной ряд при всех x из сегмента $[-r, +r]$, значит ряд (15.1) равномерно сходится на этом сегменте по признаку Вейерштрасса.

Замечание 1. Для ряда (15.1) в условиях леммы выполнены все требования теоремы о непрерывности суммы, поэтому его сумма непрерывна.

Теорема 15.2. Сумма степенного ряда внутри его промежутка сходимости является непрерывной функцией.

Доказательство. Пусть $S(x)$ — сумма степенного ряда (15.1), а R — его радиус сходимости. Фиксируем любое x такое, что $|x| < R$. Всегда можно найти такое число r, что $|x| < r < R$. В силу замечания 15.1 функция $S(x)$ непрерывна на сегменте $|x| < r$, а, следовательно, и в точке x.

15.4 Почленное интегрирование и почленное дифференцирование степенного ряда.

Теорема 15.3. Если $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда (15.1), а x удовлетворяет условию $|x| < R$, то ряд (15.1) можно почленно интегрировать на сегменте $[0, x]$. Полученный в результате почленного интегрирования ряд будет иметь тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

Доказательство. Для любого x, удовлетворяющего условиям теоремы, найдется такое число r, что $|x| < r < R$. Согласно утверждению 15.3 ряд (15.1) сходится равномерно на сегменте $[-r, +r]$, а, следовательно, и на сегменте $[0, x]$. Тогда этот ряд можно почленно интегрировать на данном сегменте.

В результате почленного интегрирования получится степенной ряд

$$a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \ldots, \tag{15.15}$$

радиус сходимости которого, согласно теореме Коши-Адамара, является величиной, обратной верхнему пределу последовательности

$$\sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}} = \frac{\sqrt[n]{|a_{n-1}|}}{\sqrt[n]{n}}. \tag{15.16}$$

Верхний предел этой последовательности совпадает с верхним пределом последовательности (15.2). Теорема доказана.

Теорема 15.4. Степенной ряд (15.1) внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать почленно. Ряд, полученный почленным дифференцированием, имеет тот же радиус сходимости R, что и исходный ряд.

Доказательство. Все условия теоремы о почленном дифференцировании для ряда (15.1) выполнены сразу же, остается доказать второе утверждение.

В результате почленного дифференцирования (15.1) получим ряд

$$a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots, \tag{15.17}$$

радиус сходимости которого обратен верхнему пределу последовательности

$$\sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|}, \tag{15.18}$$

а он совпадает с верхним пределом исходной последовательности. Теорема доказана.

15.5 Разложение функций в степенные ряды.

Определение 15.2. Будем говорить, что функция $f(x)$ на интервале $(-R, +R)$ (на множестве $\{x\}$) *может быть разложена в степенной ряд*, если существует степенной ряд, сходящийся к $f(x)$ на указанном интервале (множестве).

Утверждение 15.4. Для того, чтобы функция $f(x)$ могла быть разложена в степенной ряд на интервале $(-R, +R)$, необходимо, чтобы эта функция имела на указанном интервале непрерывные производные любого порядка.

`Доказательство.` Степенной ряд внутри его промежутка сходимости, который по меньшей мере содержит интервал $(-R, +R)$, можно почленно дифференцировать сколько угодно раз, и все полученные ряды будут сходиться внутри того же промежутка. Тогда суммы указанных рядов — функции, непрерывные на $(-R, +R)$.

Утверждение 15.5. Если функция $f(x)$ может на интервале $(-R, +R)$ быть разложена в степенной ряд, то лишь единственным образом.

`Доказательство.` Дифференцируем ряд, в который разлагается функция $f(x)$, почленно n раз:

$$f^{(n)}(x) = a_n n! + a_{n+1}(n+1)!x + \ldots \tag{15.19}$$

При $x = 0$ отсюда получим

$$f^{(n)}(0) = a_n n!, \tag{15.20}$$

или

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \tag{15.21}$$

Тогда коэффициенты степенного ряда по этой формуле определены *однозначно.*

Определение 15.3. Степенной ряд (15.1), коэффициенты которого определяются по формуле (15.21), называется *рядом Тейлора* для функции $f(x)$.

Утверждение 15.6. Если функция $f(x)$ может быть разложена на интервале $(-R, +R)$ в степенной ряд, то этот ряд является рядом Тейлора для данной функции.

Утверждение 15.7. Для того, чтобы функция $f(x)$ могла быть разложена в ряд Тейлора на интервале $(-R, +R)$ (на множестве $\{x\}$), необходимо и достаточно, чтобы остаточный член в формуле Маклорена для этой функции стремился к нулю на указанном интервале (множестве).

16 Равномерное приближение непрерывных функций алгебраическими многочленами.

Для заметок[3] =)

[3] В моем списке билетов написано, что этот билет не надо. Это правда?

17 Определение и условия существования двойного интеграла при помощи прямоугольных разбиений области. Классы интегрируемых функций.

17.1 Определение двойного интеграла для прямоугольника.

Рассмотрим произвольную функцию $f(x, y)$, определенную всюду на прямоугольнике R:

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d. \tag{17.1}$$

Разобъем сегмент $[a, b]$ на n частичных сегментов при помощи точек $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = p$, а сегмент $[c, d]$ на p частичных сегментов при помощи точек $c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_p = d$. Этому разбиению сегментов соответствует разбиение исходного прямоугольника на np частичных прямоугольников. Обозначим через R_{kl} частичный прямоугольник

$$x_{k-1} \leq x \leq x_k, \quad y_{l-1} \leq y \leq y_l. \tag{17.2}$$

Указанное разбиение прямоугольника R обозначим как T. Разбиение прямоугольника R, полученное из T добавлением прямых, параллельных осям Ox и Oy, будем называть *измельчением разбиения* T и обозначать T'.

На каждом частичном прямоугольнике R_{kl} выберем произвольную точку (ξ_k, η_l). Положим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_l = y_l - y_{l-1}$ и обозначим через ΔR_{kl} площадь прямоугольника R_{kl}: $R_{kl} = \Delta x_k \cdot \Delta y_l$. Длину диагонали прямоугольника R_{kl}, равную $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, назовем *диаметром* этого прямоугольника. Наибольший из всех диаметров частичных прямоугольника назовем *диаметром разбиения* T и обозначим символом Δ.

Определение 17.1. Число

$$\sigma = \sigma(f, T) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} f(\xi_k, \eta_l) \Delta R_{kl}. \tag{17.3}$$

назовем *интегральной суммой* функции $f(x, y)$, соответствующей данному разбиению T прямоугольника R и данному выбору промежуточных точек (ξ_k, η_l) на частичных прямоугольниках разбиения T.

Определение 17.2. Число I называется *пределом интегральных сумм* (17.3) при $\Delta \to 0$, если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ, что при $\Delta < \delta$ независимо от выбора промежуточных точек выполняется равенство $|\sigma - I| < \varepsilon$.

Определение 17.3. Функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой в смысле Римана* на прямоугольнике R, если существует конечный предел I интегральных сумм при $\Delta \to 0$. Указанный предел называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по прямоугольнику R и обозначается

$$I = \iint\limits_R f(x, y)dxdy = \iint\limits_R f(M)d\sigma. \tag{17.4}$$

Утверждение 17.1. Если функция $f(x, y)$ интегрируема на прямоугольнике R, то она на этом прямоугольнике ограничена.

17.2 Условия существования двойного интеграла для прямоугольника.

Составим для данного разбиения T прямоугольника R верхнюю и нижнюю суммы:

$$S = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} M_{kl}\Delta R_{kl} \quad \text{, где } M_{kl} = \sup_{R_{kl}} f(x, y) \tag{17.5}$$

и

$$s = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} m_{kl}\Delta R_{kl} \quad \text{, где } m_{kl} = \inf_{R_{kl}} f(x, y). \tag{17.6}$$

Справедлив следующий набор простых в доказательстве утверждений.

Утверждение 17.2. Для любого разбиения T прямоугольника R при любом выборе промежуточных точек на частичных прямоугольниках R_{kl} интегральная сумма удовлетворяет соотношению $s \leq \sigma \leq S$.

Утверждение 17.3. Для любого фиксированного разбиения T и любого числа $\varepsilon > 0$ промежуточные точки можно выбрать так, что интегральная сумма σ будет удовлетворять неравенствам $0 \leq S - \sigma < \varepsilon$. Можно, симметрично, выбрать точки и так, чтобы выполнялось $0 \leq \sigma - s < \varepsilon$.

Утверждение 17.4. Пусть T' — измельчение разбиения T прямоугольника R, и S', s' — его верхняя и нижняя суммы. Тогда $s \leq s'$, $S' \leq S$.

Утверждение 17.5. Пусть T' и T'' — два разбиения прямоугольника R. Обозначим нижние и верхние суммы этих разбиений как s', s'', S', S''. Тогда $s' \leq S''$, $s'' \leq S'$.

Утверждение 17.6. Множество $\{S\}$ всех верхних сумм данной функции для всевозможных разбиений прямоугольника R ограничено снизу некоторым числом $I_* = \inf\{S\}$. Множество $\{s\}$ всех нижних сумм данной функции для всевозможных разбиений прямоугольника R ограничено сверхну некоторым числом $I^* = \sup\{s\}$.

Утверждение 17.7. Пусть T' — измельчение разбиения T прямоугольника R, полученное из T добавлением p новых прямых, и пусть S, s, S', s'

— верхние и нижние суммы этих разбиений. Тогда

$$S - S' \le (M_R - m_R)p\Delta d; \quad s' - s \le (M_R - m_R)p\Delta d, \tag{17.7}$$

где $M_R = \sup_R f(x,y)$, $m_R = \inf_R f(x,y)$, Δ — диаметр разбиения T, d — диаметр прямоугольника d.

Далее в полной аналогии с понятием предела интегральных сумм вводятся понятия *предела верхних интегральных сумм* и *предела нижних интегральных сумм* при $\Delta \to 0$.

Утверждение 17.8. Указанные выше числа I_* и I^* являются соответственно пределом нижних и верхних интегральных сумм при $\Delta \to 0$.

Теорема 17.1. Для того, чтобы ограниченная на прямоугольнике R функция $f(x,y)$ была интегрируемой на этом прямоугольнике, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось такое разбиение T прямоугольника R, для которого $S - s < \varepsilon$.

Теорема 17.2. Любая непрерывная в прямоугольнике R функция интегрируема в этом прямоугольнике.

Определение 17.4. Назовем *элементарной фигурой* множество точек, представляющее собой объединение конечного числа прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат.

Определение 17.5. Будем говорить, что функция $f(x,y)$ обладает в прямоугольнике R (в произвольной замкнутой области D) *I-свойством*, если: $f(x,y)$ ограничена в R (в D); для любого $\varepsilon > 0$ найдется элементарная фигура площади, меньшей ε, содержащая все точки и линии разрыва $f(x,y)$.

Теорема 17.3. Если функция $f(x,y)$ обладает в прямоугольнике I-свойством, то она интегрируема на этом прямоугольнике.

17.3 Определение и условия существования интеграла для произвольной области.

Определение 17.6. Кривая Γ называется *кривой площади нуль*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется многоугольник, содержащий все точки Γ и имеющий площадь, меньшую ε.

Утверждение 17.9. Пусть кривая Γ имеет площадь нуль и плоскость покрыта квадратной сеткой с шагом h. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется h такое, что сумма площадей всех квадратов, имеющих общие точки с Γ, меньше ε.

Доказательство. Для каждого $\varepsilon > 0$ можно фиксировать некоторую элементарную фигуру Q, содержащую внутри себя Γ и имеющую площадь, меньшую $\varepsilon/4$. При достаточно малом h все квадраты, имеющие общие точки с Γ будут содержаться в элементарной фигуре, получающейся заменой каждого прямоугольника прямоугольником со вдвое большими сторонами и тем же центром.

Пусть D — замкнутая ограниченная область с границей Γ площади нуль, а $f(x,y)$ — произвольная ограниченная функция, определенная в D. Обозначим через R любой прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, содержащий область D. Определим теперь в прямоугольнике R следующую функцию:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ,(x,y) \in D; \\ 0 & ,(x,y) \in R \setminus D. \end{cases} \tag{17.8}$$

Определение 17.7. Функцию $f(x,y)$ назовем *интегрируемой* в области D, если функция $F(x,y)$ интегрируема в прямоугольнике R. Число $I = \iint_R F(x,y)dxdy$ назовем *двойным интегралом по области* D от функции $f(x,y)$ и обозначим

$$I = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(x,y)d\sigma. \tag{17.9}$$

В связи с обобщением определения интеграла оказываются полезными следующие утверждения.

Утверждение 17.10. Интеграл $\iint_D dxdy$ равен площади области D.

`Доказательство.` Измельчая каждый раз разбиение T, мы будем получать, что верхние суммы будут приближаться к площадям элементарных фигур, содержащих D; нижние суммы будут приближаться к площадям элементарных фигур, содержащихся в D.

Утверждение 17.11. Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема в ограниченной квадрируемой области D, плоскость покрыта квадратной сеткой с шагом h, $C_1, C_2, \ldots, C_{n(h)}$ — квадраты указанной сетки, целиком содержащиеся в области D, (ξ_k, η_k) — произвольная точка квадрата C_k, $m_k = \inf_{C_k} f(x,y)$, $k = 1, 2, \ldots, n(h)$. Тогда каждая из сумм

$$\sum_{k=1}^{n(h)} f(\xi_k, \eta_k)h^2, \quad \sum_{k=1}^{n(h)} m_k h^2 \tag{17.10}$$

имеет предел при $h \to 0$, равный $\iint_D f(x,y)dxdy$.

`Доказательство.` Заметим, что указанные суммы отличаются от обычной интегральной и нижней суммы (соответственно) лишь тем, что в них не входят слагаемые по квадратам, имеющим общие точки с границей Γ области D, причем сумма всех отсутствующих слагаемых по модулю меньше произведения числа $M = \sup_D |f(x,y)|$ на площадь S элементарной фигуры, состоящей из квадратов, имеющих общие точки с Γ. Но поскольку граница Γ имеет площадь нуль, $S \to 0$ при $h \to 0$.

Теорема 17.4. Если функция $f(x, y)$ обладает в D I-свойством, то она интегрируема в D.

`Доказательство.` Достаточно заметить, что введенная выше функция $F(x, y)$ будет обладать I-свойством в прямоугольнике R, а, значит, $f(x, y)$ интегрируема в области D.

Следствие 1. Если функция $f(x, y)$ ограничена в области D и имеет в этой области разрывы лишь на конечном числе спрямляемых линий, то $f(x, y)$ интегрируема в области D.

Следствие 2. Если функция $f(x, y)$ обладает в области D I-свойством, а $g(x, y)$ ограничена и совпадает с $f(x, y)$ всюду в D за исключением множества точек площади нуль, то функция $g(x, y)$ интегрируема в области D, причем

$$\iint\limits_D g(x, y) dx dy = \iint\limits_D f(x, y) dx dy. \tag{17.11}$$

18 Определение двойного интеграла при помощи произвольных разбиений области. Эквивалентность двух определений. Основные свойства двойного интеграла.

18.1 Общее определение двойного интеграла.

Пусть D — замкнутая ограниченная область с границей Γ площади нуль. Разобъем область D при помощи конечного числа кривых площади нуль на конечное число r (не обязательно связных) замкнутых частичных областей $D_1, D_2, \ldots, D_r$. Каждая из областей D_i имеет границу площади нуль, и поэтому квадрируема. Обозначим площадь области D_i через ΔD_i. В каждой области D_i выберем произвольную точку $P_i(\xi_i, \eta_i)$.

Определение 18.1. Число

$$\tilde{\sigma} = \sum_{i=1}^{r} f(P_i)\Delta D_i \tag{18.1}$$

называется *интегральной суммой* функции $f(x,y)$, соответствующей данному разбиению области D на частичные области и данному выбору промежуточных точек в частичных областях.

Определение 18.2. *Диаметром области* D_i будем называть число

$$d_i = \sup_{M_1 M_2 \in D_i} \rho(M_1, M_2). \tag{18.2}$$

Диаметром разбиения области D назовем число $\tilde{\Delta} = \max_{1 \le i \le r} d_i$.

Определение 18.3. Число I называется *пределом интегральных сумм* при $\tilde{\Delta} \to 0$, если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ, что при $\tilde{\Delta} < \delta$ независимо от выбора точек P_i в частичных областях D_i выполняется неравенство $|\tilde{\sigma} - I| < \varepsilon$.

Определение 18.4. Функция $f(x,y)$ называется *интегрируемой в смысле Римана* в области D, если существует конечный предел интегральных сумм I при $\tilde{\Delta} \to 0$. Этот предел I называется *двойным интегралом* от функции $f(x,y)$ по области D:

$$I = \iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)d\tilde{\sigma}. \tag{18.3}$$

18.2 Эквивалентность двух определений двойного интеграла.

Теорема 18.1. Общее определение интегрируемости эквивалентно определению интегрируемости через прямоугольники.

Доказательство. 1. Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема в области D по общему определению интегрируемости, и ее двойной интеграл по этому определению равен I. Заключим D в прямоугольник R, разобъем его на частичные прямоугольники и введем на R функцию

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{, если } (x,y) \in D; \\ 0 & \text{, если } (x,y) \in R \setminus D. \end{cases} \tag{18.4}$$

Рассмотрим интегральные суммы $\tilde{\sigma}$ и σ. Эти суммы могут отличаться лишь слагаемыми, соответствующими частичным прямоугольникам разбиения, имеющим общие точки с границей Γ области D. Поскольку Γ имеет площадь нуль, а функция $f(x,y)$ ограничена, то эта функция интегрируема и по определению через прямоугольники, и имеет тот же двойной интеграл I.

2. Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема в области D по определению через прямоугольники, и I — двойной интеграл от $f(x,y)$ по области D согласно этому определению. Докажем, что для функции $f(x,y)$ существует равный I предел интегральных сумм $\tilde{\sigma}$ при $\tilde{\Delta} \to 0$. Составим верхнюю и нижнюю суммы для данного разбиения:

$$\tilde{S} = \sum_{i=1}^{r} \tilde{M}_i \Delta D_i, \quad \tilde{s} = \sum_{i=1}^{r} \tilde{m}_i \Delta D_i, \tag{18.5}$$

где $\tilde{M}_i = \sup_{D_i} f(x,y)$, $\tilde{m}_i = \inf_{D_i} f(x,y)$. Так как для любого разбиения и при любом выборе промежуточных точек

$$\tilde{s} \le \tilde{\sigma} \le \tilde{S}, \tag{18.6}$$

то достаточно показать, что обе суммы $\tilde{s}$ и $\tilde{S}$ стремятся к I при стремлении диаметра разбиения к нулю.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Для этого ε найдется такое разбиение T прямоугольника R, содержащего D, на частичные прямоугольники R_k такое, что для него

$$S - s < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \sum_{R_k \cap \Gamma \neq \emptyset} \Delta R_k < \frac{\varepsilon}{6M_0}, \tag{18.7}$$

где $M_0 = \sup_D |f(x,y)|$.

Заключим все отрезки прямых, производящих разбиение T и границу Γ области D строго внутрь элементарной фигуры Q, площадь которой меньше числа $\varepsilon/6M_0$. Тогда существует положительная точная нижняя грань δ расстояния между двумя точками, одна из которых принадлежит границе фигуры Q, а другая — отрезкам прямых, производящих разбиение T, или границе Γ области D. Докажем, что для сумм $\tilde{S}$ и $\tilde{s}$ любого разибения области D, удовлетворяющего условию $\tilde{\Delta} < \delta$, выполнены неравенства

$$\tilde{S} < S + \varepsilon/2, \quad \tilde{s} > s - \varepsilon/2. \tag{18.8}$$

Остановимся на доказательстве первого из этих неравенств: второе неравенство доказывается аналогично. Удалим из суммы $\tilde{S}$ все слагаемые $\tilde{M}_i \Delta D_i$, соответствующие областям D_i, каждая из которых не лежит целиком в одном частичном прямоугольнике разбиения T. Все такие области лежат в Q, а поэтому общая сумма их площадей меньше числа $\varepsilon/6M_0$. Тогда и сумма всех удаленных слагаемых меньше числа $\varepsilon/6$, и справедливо

$$\tilde{S} < \sum_i{}' \tilde{M}_i \Delta D_i + \frac{\varepsilon}{6}, \tag{18.9}$$

где штрих при сумме означает суммирование только по областям D_i, целиком содержащимся в одном из прямоугольников разбиения T.

Введем обозначение

$$\tilde{R}_k = \bigcup_{D_i \subset R_k} D_i \tag{18.10}$$

и через $\Delta \tilde{R}_k$ обозначим площадь этой области. Тогда

$$\tilde{S} < \sum_k M_k \Delta \tilde{R}_k + \frac{\varepsilon}{6}. \tag{18.11}$$

Для прямоугольников $R_k \subset D$ области $R_k \setminus \tilde{R}_k \subset Q$, поэтому для них

$$\sum_k \Delta(R_k \setminus \tilde{R}_k) = \sum_k (\Delta R_k - \Delta \tilde{R}_k) \le \Delta Q < \frac{\varepsilon}{6M_0}, \tag{18.12}$$

а для прямоугольников R_k, пересекающихся с Γ

$$\sum_k \Delta(R_k \setminus \tilde{R}_k) \le \sum_k \Delta R_k < \frac{\varepsilon}{6M_0}, \tag{18.13}$$

и, следовательно,

$$\left| S - \sum_k M_k \Delta \tilde{R}_k \right| = \left| M_k (\Delta R_k - \Delta \tilde{R}_k) \right| < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} = \frac{\varepsilon}{3} \tag{18.14}$$

и

$$\sum_k M_k \Delta \tilde{R}_k < S + \frac{\varepsilon}{3}, \tag{18.15}$$

откуда, наконец,

$$\tilde{S} < S + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{6} = S + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{18.16}$$

Первое из неравенств (18.8) доказано, второе доказывается абсолютно аналогично. Из (18.8) тогда получим

$$s - \frac{\varepsilon}{2} < \tilde{s} \le \tilde{S} < S + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{18.17}$$

В силу (18.7) s и S отклоняются от I меньше, чем на $\varepsilon/2$, а тогда из последнего неравенства, следует, что $\tilde{s}$ и $\tilde{S}$ отклоняются от I меньше, чем на ε, что и требовалось доказать[4].

18.3 Основные свойства двойного интеграла.

Утверждение 18.1 (аддитивность). Если функция $f(x,y)$ интегрируема в области D, и если область D при помощи кривой Γ площади нуль разбивается на две связные и не имеющие общих внутренних точек области D_1 и D_2, то функция $f(x,y)$ интегрируема в каждой из них и справедливо соотношение

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy. \qquad (18.18)$$

Доказательство. Разобъем области D_1 и D_2 на конечное число квадрируемых областей, и получим разбиение области D. Пусть $\tilde{s}$ и $\tilde{S}$, $\tilde{s}_1$ и $\tilde{S}_1$, $\tilde{s}_2$ и $\tilde{S}_2$ — соответственно нижние и верхние суммы областей D, D_1, D_2. Так как $D_1 \subset D$, $D_2 \subset D$, то $\tilde{S}_1 - \tilde{s}_1 \le \tilde{S} - \tilde{s}$, $\tilde{S}_2 - \tilde{s}_1 \le \tilde{S} - \tilde{s}$, откуда и вытекает интегрируемость функции $f(x,y)$ на областях D_1 и D_2. Справедливость (18.18) вытекает из того, что $\tilde{S} = \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2$, $\tilde{s} = \tilde{s}_1 + \tilde{s}_2$.

Верно и обратное утверждение.

Утверждение 18.2. Из интегрируемости функции $f(x,y)$ в каждой из областей D_1 и D_2 следует интегрируемость в области D и справедливость формулы (18.18).

Доказательство. В самом деле, разбивая область D на конечное число квадрируемых частей D_i и вводя верхние и нижние суммы $f(x,y)$ в областях D, D_1, D_2, мы получим равенства $\tilde{S} = \tilde{S}_1 + \tilde{S}_2$, $\tilde{s} = \tilde{s}_1 + \tilde{s}_2$, верные с точностью до слагаемых, отвечающих тем областям D_i, которые имеют общие точки с границей Γ. Кривая Γ имеет площадь нуль, функция $f(x,y)$ ограничена, поэтому общая сумма этих слагаемых будет стремиться к нулю при $\tilde{\Delta} \to 0$.

Утверждение 18.3 (линейность). Пусть функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в области D, α и β — произвольные вещественные числа. Тогда функция $\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)$ также интегрируема в области D, причем

$$\iint\limits_{D} [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]dxdy = \alpha \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy + \beta \iint\limits_{D} g(x,y)dxdy. \qquad (18.19)$$

Утверждение 18.4. Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в области D, то и их произведение интегрируемо в области D.

[4] Ура, товарищи!

Утверждение 18.5. Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в области D, и всюду в этой области $f(x,y) \le g(x,y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy \le \iint\limits_D g(x,y)dxdy. \tag{18.20}$$

Утверждение 18.6. Если функция $f(x,y)$ интегрируема в области D, то и функция $|f(x,y)|$ интегрируема в области D, причем

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|dxdy. \tag{18.21}$$

Утверждение 18.7. Если функция $f(x,y)$ интегрируема в области D, а $g(x,y)$ ограничена и совпадает с $f(x,y)$ всюду в D, за исключением множества точек площади нуль, то и $g(x,y)$ интегрируема в области D.

Утверждение 18.8 (теорема о среднем значении). Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в области D, фукнция $g(x,y)$ неотрицательна (неположительна) всюду в этой области, $M = \sup_D f(x,y)$, $m = \inf_D f(x,y)$, то найдется число $\mu \in [m, M]$ такое, что выполнено

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)dxdy = \mu \iint\limits_D g(x,y)dxdy. \tag{18.22}$$

Если при этом функция $f(x,y)$ непрерывна в D, а D связна, то в D найдется такая точка (ξ,η), что $\mu = f(\xi,\eta)$.

Утверждение 18.9 (геометрическое свойство). Интеграл $\iint_D dxdy$ равен площади области D.

19 Сведение двойного интеграла к повторному однократному.

19.1 Случай прямоугольника.

Пусть для начала область интегрирования представляет собой прямоугольник $R = [a \le x \le b] \times [c \le y \le d]$.

Теорема 19.1. Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема в прямоугольнике R, и пусть для всех $x \in [a, b]$ существует однократный интеграл

$$I(x) = \int\limits_c^d f(x, y)dy. \tag{19.1}$$

Тогда существует повторный интеграл

$$\int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)dy, \tag{19.2}$$

и справедливо равенство

$$\iint\limits_R f(x, y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)dy. \tag{19.3}$$

Доказательство. Разобъем прямоугольник R с помощью точек $\{x_k\}$, $\{y_l\}$ на np частичных прямоугольников $R_{kl} = [x_{k-1} \le x \le x_k] \times [y_{l-1} \le y \le y_l]$ так, чтобы при этом $a = x_0$, $b = x_n$, $y_0 = c$, $y_p = d$, и обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_l = y_l - y_{l-1}$. Пусть также число Δ обозначает диаметр разбиения прямоугольника R, и

$$M_{kl} = \sup_{R_{kl}} f(x, y), \quad m_{kl} = \inf_{R_{kl}} f(x, y), \tag{19.4}$$

а S и s — верхняя и нижняя сумма, соответственно. Тогда всюду на прямоугольнике R_{kl}

$$m_{kl} \le f(x, y) \le M_{kl}. \tag{19.5}$$

Фиксируем произвольное число ξ_k из сегмента $[x_{k-1}, x_k]$ и интегрируем по неравенство (19.5) по y в пределах от y_{l-1} до y_l, положив $x = \xi_k$:

$$m_{kl}\Delta y_l \le \int\limits_{y_{l-1}}^{y_l} f(\xi_k, y)dy \le M_{kl}\Delta y_l. \tag{19.6}$$

Домножим теперь (19.6) на Δx_k и просуммируем все семейство таких неравенств сначала по всем $l = 1, 2, \ldots, p$, а затем по всем $k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$s = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} m_{kl}\Delta x_k \Delta y_l \le \sum_{k=1}^{n} I(\xi_k)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{p} M_{kl}\Delta x_k \Delta y_l \le S. \tag{19.7}$$

Устремим Δ к нулю. Тогда и $\max_k \Delta x_k \to 0$, а суммы S и s стремятся к двойному интегралу $\iint_R f(x,y)dxdy$. Тогда существует и предел среднего члена неравенства (19.7) при $\Delta \to 0$, равный тому же самому двойному интегралу. Но, с другой стороны, по определению однократного интеграла этот предел равен

$$\int\limits_a^b I(x)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dx. \tag{19.8}$$

Теорема доказана.

Замечание 1. В силу равноправности координат в условиях теоремы можно, очевидно, поменять x и y местами, т.е. сначала интегрировать по x, а затем по y.

19.2 Случай произвольной области.

Рассмотрим теперь произвольную ограниченную замкнутую квадрируемую область D с границей Γ площади нуль.

Теорема 19.2. Пусть область D такова, что любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает ее границу Γ по целому отрезку $[y_1(x), y_2(x)]$, либо не более, чем в двух точках $y_1(x)$ и $y_2(x)$, причем $y_1(x) \le y_2(x)$. Пусть также функция $f(x,y)$ интегрируема в области D, и для всех $x \in [x_1, x_2]$ существует однократный интеграл

$$\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy, \tag{19.9}$$

где $[x_1, x_2]$ — проекция области D на ось Ox. Тогда существует повторный интеграл

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy, \tag{19.10}$$

причем

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_{x_1}^{x_2} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy. \tag{19.11}$$

`Доказательство.` Обозначим через R прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, полностью содержащий область D, а через $F(x,y)$ функцию, определенную в R, и принимающую значения $f(x,y)$ в тех точках R, которые принадлежат D, и значение 0 во всех остальных точках. Для $F(x,y)$ в прямоугольнике R выполнены условия теоремы 19.1, и в силу выбора функции $F(x,y)$ теорема доказана.

20 Кратные несобственные интегралы от неотрицательных функций. Признаки сходимости.

20.1 Понятие кратного несобственного интеграла.

Пусть D — открытое связное множество точек пространства. Символом $\overline{D}$ будем обозначать замыкание D, т.е. объединение D с его границей.

Определение 20.1. Будем говорить, что последовательность $\{D_n\}$ открытых связных множеств *монотонно исчерпывает множество* D, если $\overline{D}_n \subset D_{n+1}$ для любого номера n, и объединение всех D_n дает множество D.

Пусть теперь на множестве D задана функция $f(x)$[5], интегрируема по Риману на любом замкнутом квадрируемом (кубируемом) подмножестве D. Будем рассматривать всевозможные последовательности открытых множеств $\{D_n\}$, монотонно исчерпывающие D, и при этом такие, что замыкание $\overline{D}_n$ каждого множества из последовательности квадрируемо (кубируемо).

Определение 20.2. Если для любой последовательности $\{D_n\}$, обладающей обозначенными выше свойствами, существует предел при $n \to \infty$ последовательности

$$a_n = \int\limits_{\overline{D}_n} f(x)dx, \tag{20.1}$$

и этот предел не зависит от выбора последовательности $\{D_n\}$, то этот предел называется *несобственным интегралом* от $f(x)$ по области D и обозначается одним из следующих символов:

$$\int\limits_D f(x)dx \text{ или } \int \cdots \int\limits_D f(x_1, x_2, \ldots, x_m)dx_1 dx_2 \ldots dx_m. \tag{20.2}$$

При этом несобственный интеграл (20.2) называется *сходящимся*. В случае, когда предел указанных выше последовательностей не существует, обозначение (20.2) также применяется, и несобственный интеграл в этом случае называют *расходящимся*.

20.2 Признаки сходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций.

Теорема 20.1. Для сходимости несобственного интеграла от неотрицательной в области D функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы хотя бы для одной последовательности квадрируемых (кубируемых) областей $\{D_n\}$, монотонно исчерпывающей D, была ограничена числовая последовательность $\{a_n\}$.

[5]Здесь x, вообще говоря, вектор.

`Необходимость.` Так как по определению несобственного интеграла при любом выборе $\{D_n\}$ последовательность $\{a_n\}$ должна сходиться, то она будет и ограниченной.

`Достаточность.` Последовательность $\{a_n\}$ ограничена и монотонно не убывает, т.к. $\overline{D}_n \subset D_{n+1}$, и $f(x) \geq 0$, а, следовательно, она сходится к некоторому числу I. Остается лишь доказать, что число I не зависит от выбора последовательности $\{D_n\}$, а именно, что другая последовательность областей $\{D'_n\}$ имеет последовательность

$$a'_n = \int\limits_{\overline{D}'_n} f(x)dx, \qquad (20.3)$$

сходящуюся к тому же числу I. Фиксруем любой номер n_0 и рассмотрим область D'_{n_0}. Найдется номер n_1 такой, что $\overline{D}'_{n_0} \subset D_{n_1}$. Действительно, пусть это не так. Тогда для любого номера k можно указать такую точку $M_k \in \overline{D}'_{n_0}$, которая, в то же время, не принадлежит области D_k. В силу замнкутости и ограниченности областей из $\{M_k\}$ можно выделить сходящуюся к некоторй точке $M \in \overline{D}'_{n_0}$ подпоследовательность. Точка M вместе с некоторой ее окрестностью лежит в области D_{k_1}. Но тогда этому множеству D_{k_1} (и, в силу выбора D_n, всем последующим областям D_k) принадлежат точки M_k со сколь угодно большими номерами k, что противоречит их выбору.

Итак, существует номер n_0 такой, что $\overline{D}'_{n_0} \subset D_{n_1}$, откуда

$$a'_{n_0} \leq a_{n_1} \leq I. \qquad (20.4)$$

Отсюда следует, что последовательность $\{a'_n\}$ сходится к некоторому числу $I' \leq I$. Меняя местами в наших рассуждениях последовательности $\{a_n\}$ и $\{a'_n\}$, придем к тому, что $I \leq I'$, т.е. $I = I'$.

Теорема 20.2 (общий признак сравнения). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ всюду на открытом множестве D удовлетворяют условию $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int_D g(x)dx$ вытекает сходимость несобственного интеграла $\int_D f(x)dx$, из расходимости несобственного интеграла $\int_D f(x)dx$ вытекает расходимость несобственного интеграла $\int_D g(x)dx$.

`Доказательство.` Пусть $\{D_n\}$ — последовательность (квадрируемых) кубируемых областей, монотонно исчерпывающих D. В силу неотрицательности функций $f(x)$ и $g(x)$ верно неравенство

$$a_n = \int\limits_{\overline{D}_n} f(x)dx \leq \int\limits_{\overline{D}_n} g(x)dx = b_n. \qquad (20.5)$$

Отсюда напрямую следует, что ограниченность $\{b_n\}$ влечет ограниченность $\{a_n\}$, и, наоборот, неограниченность $\{a_n\}$ влечет неограниченность $\{b_n\}$. Тогда на основании уже доказанной теоремы 20.1 теорема 20.2 также оказывается доказанной.

21 Кратные несобственные интегралы от знакопеременных функций. Эквивалентность понятий сходимости и абсолютной сходимости.

21.1 Определение кратного несобственного интеграла.

Определение дается в билете за нумером 20, здесь я не вижу смысла его повторять, хотя отвечать его придется.

21.2 Абсолютная сходимость кратного несобственного интеграла.

Определение 21.1. Несобственный интеграл $\int_D f(x)dx$ будем называть *абсолютно сходящимся*, если сходится несобственный интеграл $\int_D |f(x)|dx$.

Теорема 21.1. Для несобственных m-кратных интегралов при $m \geq 2$ понятия сходимости и абсолютной сходимости эквивалентны.

`Доказательство.` 1. Докажем, что из абсолютной сходимости кратного несобственного интеграла следует его сходимость. Рассмотрим две неотрицательные функции

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2}, \quad f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}. \tag{21.1}$$

Представим их в виде

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, если } f(x) \geq 0; \\ 0 & \text{, если } f(x) < 0; \end{cases} \tag{21.2}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{, если } f(x) \leq 0; \\ 0 & \text{, если } f(x) > 0 \end{cases} \tag{21.3}$$

и отметим следующие очевидные соотношения:

$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)|, \quad 0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|; \tag{21.4}$$

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \quad |f(x)| = f_+(x) + f_-(x). \tag{21.5}$$

Согласно первым двум из этих неравенств, несобственные интегралы

$$\int\limits_D f_+(x)dx \text{ и } \int\limits_D f_-(x)dx \tag{21.6}$$

сходятся (т.к. неотрицательные подынтегральные функции на D всюду не превосходят $|f(x)|$, а интеграл $\int_D f(x)dx$ сходится по условию). Но тогда сходится и сумма и разность указанных интегралов (по определению несобственного интеграла), т.е., в частности, $\int_D f(x)dx = \int_D [f_+(x) - f_-(x)]dx$.

2. Теперь докажем, что из сходимости кратного несобственного интеграла вытекает его абсолютная сходимость. Пусть это не так. Тогда последовательность интегралов от функции $|f(x)|$ по любой монотонно исчерпывающей область D последовательности областей $\{D_n\}$ будет монотонно возрастающей бесконечно большой последовательностей. Тогда можно последовательность $\{D_n\}$ выбрать, в частности, так, что для всех $n = 1, 2, \dots$ будет выполняться

$$\int\limits_{\overline{D}_{n+1}} |f(x)|dx > 3 \int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|dx + 2n + 4. \tag{21.7}$$

Обозначим через P_n область $D_{n+1} \setminus D_n$. Тогда для всех n, согласно (21.7), окажется справедливым

$$\int \overline{P}_n |f(x)|dx > 3 \int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|dx + 2n + 4. \tag{21.8}$$

Из (21.5) следует, что

$$\int\limits_{\overline{P}_n} |f(x)|dx = \int\limits_{\overline{P}_n} f_+(x)dx + \int\limits_{\overline{P}_n} f_-(x)dx. \tag{21.9}$$

Фиксируем n. Будем считать, что из интегралов в правой части больше первый. Тогда

$$\int\limits_{\overline{P}_n} f_+(x)dx > \int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|dx + n + 2. \tag{21.10}$$

Разобъем область D на конечное число областей P_n^i так, чтобы нижняя сумма $\sum_i m_i \Delta\sigma_i$ функции $f_+(x)$ для этого разбиения удовлетворяла неравенству

$$0 \le \int\limits_{\overline{P}_n} f_+(x)dx - \sum_i m_i \Delta\sigma_i < 1. \tag{21.11}$$

Заменим тогда в (21.10) левую часть нижней суммой. Получим

$$\sum_i m_i \Delta\sigma_i > \int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|dx + n + 1. \tag{21.12}$$

Поскольку все $m_i \ge 0$, можно оставить в сумме $\sum_i m_i \Delta\sigma_i$ лишь те слагаемые, для которых m_i строго больше нуля. Объединение областей P_n^i, соответствующее данному набору слагаемых, обозначим $\tilde{P}_n$.

В области $\tilde{P}_n$ функция $f_+(x)$ строго положительна, поэтому в ней $f_+(x) = f(x)$. Тогда получим

$$\int\limits_{\overline{\tilde{P}_n}} f(x)dx > \int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|dx + n + 1. \tag{21.13}$$

Обозначим через D_n^* объединение D_n и $\tilde{P}_n$. Тогда, складывая (21.13) с очевидным неравенством

$$\int\limits_{\overline{D}_n} f(x)dx \geq -\int\limits_{\overline{D}_n} |f(x)|dx, \tag{21.14}$$

получим

$$\int\limits_{\overline{D}_n^*} f(x)dx > n+1. \tag{21.15}$$

Если ранее мы бы предположили, что больше в правой части (21.9) второй интеграл, мы бы пришли к выводу, что

$$\int\limits_{\overline{D}_n^*} f(x)dx < -n-1. \tag{21.16}$$

Тогда, переходя к модулю, получим, что для всех n

$$\left|\int\limits_{\overline{D}_n^*} f(x)dx\right| < n+1. \tag{21.17}$$

Последовательность областей $\{D_{2n}^*\}$ удовлетворяет всем условиям определения монотонно исчерпывающей D последовательности областей, кроме, возможно, условия связности. Сделаем эти области связными.

Соединим каждую область P_n^i из $\tilde{P}_n$ с D_n m-мерной кубируемой связной областью K_n^i, называемой *связкой* или *каналом*, так, чтобы полученное в результате множество стало связным. Поскольку число областей P_n^i в $\tilde{P}_n$ конечно, то и число каналов конечно. Обозначим объединение всех каналов K_n^i через K_n.

Так как функция $f(x)$ интегрируема, а, следовательно, и ограничена на P_n, то

$$\left|\int\limits_{\overline{K}_n} f(x)dx\right| \leq \int\limits_{\overline{K}_n} |f(x)|dx \leq MV(K_n), \tag{21.18}$$

где

$$M = \sup_{\overline{P}_n} |f(x)|, \tag{21.19}$$

а $V(K_n)$ — объем объединения каналов K_n. Потребуем, чтобы этот объем удовлетворял условию $V(K_n) < 1/M$. Тогда

$$\left|\int\limits_{\overline{K}_n} f(x)dx\right| < 1, \tag{21.20}$$

откуда получаем с учетом (21.17) неравенство

$$\left|\int\limits_{D_n^* \cup K_n} f(x)dx\right| > n, \tag{21.21}$$

справедливое для всех n. Последовательность связных кубируемых областей $\{D_{2n}^* \cup K_{2n}\}$ монотонно исчерпывает область D. Из только что полученного неравенства (21.21) следует, что последовательность соответствующих интегралов расходится, и, как следствие, расходится несобственный интеграл

$$\int\limits_D f(x)dx, \tag{21.22}$$

что является противоречием с условием и опровергает сделанное выше предположение. Теорема полностью доказана.

22 Криволинейные интегралы первого и второго рода.

22.1 Определение криволинейного интеграла первого и второго рода.

Рассмотрим на плоскости Oxy некоторую спрямляемую кривую, не имеющую точек самопересечения и участков самоналегания, и определенную параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t). \end{cases} \tag{22.1}$$

Будем считать эту кривую незамкнутой и ограниченной точками A и B с координатами $A(\varphi(a), \psi(a))$, $B(\varphi(b), \psi(b))$. Пусть на кривой $L = AB$ определены три функции: $f(x, y)$, $P(x, y)$, $Q(x, y)$, каждая из которой является непрерывной (и, как следствие, равномерно непрерывной) вдоль этой кривой.

Разобъем сегмент $[a, b]$ при помощи точек $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ на n частичных сегментов $[t_{k-1}, t_k]$. Кривая L при этом распадется на n частичных дуг M_0M_1, M_1M_2, …, $M_{n-1}M_n$, где точки M_k имеют координаты $x_k = \varphi(t_k)$, $y_k = \psi(t_k)$.

Выберем на каждой частичной дуге произвольную точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$, координаты которой отвечают некоторому принадлежащему сегменту $[t_{k-1}, t_k]$ значению τ_k параметра t: $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $\eta_k = \psi(\tau_k)$. Обозначим через Δl_k длину k-ой частичной дуги:

$$\Delta l_k = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt. \tag{22.2}$$

Диаметром разбиения кривой L назовем число $\Delta = \max_k \Delta l_k$. Составим три интегральные суммы:

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta l_k; \tag{22.3}$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k; \tag{22.4}$$

$$\sigma_3 = \sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k, \tag{22.5}$$

где $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$.

Определение 22.1. Назовем число I пределом интегральных сумм σ_1 (соответственно σ_2, σ_3) при стремлении к нулю диаметра разбиения Δ, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при всех $\Delta < \delta$ независимо от выбора промежуточных точек окажется выполненым неравенство $|I - \sigma_s| < \varepsilon$, где $s = 1, 2, 3$.

Определение 22.2. Если существует конечный предел интегральных сумм σ_1 при $\Delta \to 0$, то этот предел называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции $f(x,y)$ по кривой L и обозначается

$$\int\limits_L f(x,y)dl \text{ или } \int\limits_{AB} f(x,y)dl. \tag{22.6}$$

Определение 22.3. Если существует конечный предел интегральных сумм σ_2 (σ_3) при $\Delta \to 0$, то этот предел называется *криволинейным интегралом второго рода* от функции $P(x,y)$ ($Q(x,y)$) по кривой L и обозначается

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx \quad \left(\text{соответственно} \int\limits_{AB} Q(x,y)dy\right). \tag{22.7}$$

Сумму

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy \tag{22.8}$$

называют *общим криволинейным интегралом второго рода* и обозначают символом

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{22.9}$$

Из определения криволинейного интеграла вытекает следующее очевидное свойство.

Утверждение 22.1. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от того, в каком направлении (т.е. от A к B или от B к A) пробегается кривая L. Для криволинейного интеграла второго рода изменение направления обхода влечет изменение на противоположный знака:

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy. \tag{22.10}$$

22.2 Условия существования криволинейных интегралов.

Определение 22.4. Кривая L называется *гладкой*, если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ из ее параметрических уравнений имеют на сегменте $[a,b]$ непрерывные производные.

Определение 22.5. *Особыми точками* кривой L будем называть точки, соответствующие таким значениям параметра t, для которых $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 = 0$. Все остальные точки кривой будем называть *обыкновенными*.

Теорема 22.1. Если кривая $L = AB$ является гладкой и не содержит особых точек, и если функции $f(x, y)$, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вдоль этой кривой, то криволинейные интегралы первого и второго рода существуют и могут быть вычислены по формулам:

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt; \tag{22.11}$$

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \int\limits_a^b P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)\,dt; \tag{22.12}$$

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \int\limits_a^b Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\,dt. \tag{22.13}$$

Доказательство. Сразу же отметим, что указанные однократные интегралы существуют в силу требования непрерывности подынтегральных функций на сегменте $a \le t \le b$. Также ясно, что из соотношений (22.12) и (22.13) достаточно вывести лишь одно, поэтому ограничимся доказательством равенства (22.12).

Разобъем сегмент $[a, b]$ на n частичных сегментов $[t_{k-1}, t_k]$ и составим интегральные суммы для криволинейных интегралов, которые с учетом

$$\Delta x_k = \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)\,dt \tag{22.14}$$

представим в следующем виде:

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^n \left[f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt \right]; \tag{22.15}$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^n \left[P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t)dt \right]. \tag{22.16}$$

Обозначим определенные однократные интегралы в правых частях соответственно как I_1 и I_2. Представим эти интегралы в виде суммы n интегралов по частичным сегментам и оценим разности

$$\sigma_1 - I_1 = \sum_{k=1}^n \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} [f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - f(\varphi(t), \psi(t))]\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt; \tag{22.17}$$

$$\sigma_2 - I_2 = \sum_{k=1}^n \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} [f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - f(\varphi(t), \psi(t))]\varphi'(t)\,dt. \tag{22.18}$$

Итак, согласно условию теоремы, функции $f(\varphi(t), \psi(t))$ и $P(\varphi(t), \psi(t))$ как сложные функции аргумента t непрерывны и, следовательно, равномерно непрерывны на сегменте $a \leq t \leq b$. Теперь заметим, что при стремлении к нулю диаметра разбиения Δ стремится к нулю и наибольшая из разностей $t_k - t_{k-1}$: так как

$$m = \min_{a \leq t \leq b} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} > 0 \text{ и } \Delta l_k \leq m \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = m\Delta t_k, \qquad (22.19)$$

то

$$\Delta t_k \leq \frac{1}{m} \Delta l_k. \qquad (22.20)$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что при $\Delta < \delta$ выражение

$$f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - f(\varphi(t), \psi(t)) \qquad (22.21)$$

окажется по модулю меньше, чем ε / l, где l — длина кривой L. Аналогично для криволинейного интеграла второго рода можно ограничить этот же модуль числом $\frac{\varepsilon}{M(b-a)}$, где $M = \max |\varphi'(t)|$. С учетом этого получим оценки:

$$|\sigma_1 - I_1| \leq \frac{\varepsilon}{l} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt = \frac{\varepsilon}{l} \sum_{k=1}^{n} \Delta l_k = \varepsilon, \qquad (22.22)$$

$$|\sigma_2 - I_2| \leq \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\varphi'(t)|\, dt \leq \frac{\varepsilon}{M(b-a)} M \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k = \varepsilon. \qquad (22.23)$$

Теорема доказана.

22.3 Свойства криволинейных интегралов.

Криволинейным интегралам присущи многие из свойств «обычных» интегралов, а именно аддитивность, линейное свойство, оценка для модуля и формула среднего значения.

Особым случаем криволинейного интеграла является случай, когда кривая, по которой производится интегрирование, замкнута. Поэтому нужно установить некоторое стандартное направление обхода замкнутых кривых. Из двух возможных направлений *положительным* будем называть то направление обхода, при котором область, лежащая внутри контура, все время находится по левую сторону по отношении к точке, совершающей обход. Будем считать, что в криволинейном интеграле по замкнутому контуру контур обходится в положительном направлении.

23 Понятие поверхности. Нормаль и касательная плоскость к поверхности. Лемма о проекции окрестности точки на касательную плоскость.

23.1 Понятие поверхности.

Определение 23.1. Отображение f области G на плоскости на множество G^* трехмерного пространства называется *гомеоморфным*, если это отображение осуществляет взаимно однозначное соответствие между точками G и G^*, при котором каждая фундаментальная последовательность точек G переходит в фундаментальную последовательность точек G^* и наоборот.

Определение 23.2. Отображение f области G на G^* называется *локально гомеоморфным*, если у каждой точки G есть окрестность, которая гомеоморфно отображается на свой образ.

Определение 23.3. Область G на плоскости T называется *элементарной*, если эта область является образом открытого круга D при гомеоморфном отображении этого круга на плоскость T.

Определение 23.4. Связная область G на плоскости T называется *простой*, если любая точка G имеет окрестность, являющуюся элементарной областью.

Определение 23.5. Множество точек Φ пространства называется *поверхностью*, если это множество является образом простой плоской области G при локально гомеоморфном отображении f области G в пространство E^3.

Пусть на плоскости (u, v) задана простая область G, и для всех точек этой области определены три функции:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \tag{23.1}$$

или, что то же самое, векторная функция

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v). \tag{23.2}$$

Пусть выполнены два требования A: функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ имеют в области G непрерывные частные производные первого порядка по переменным u и v; всюду в области G матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \tag{23.3}$$

имеет ранг, равный двум.

Утверждение 23.1. При выполнении этих двух требований A множество Φ точек, определяемых уравнениями (23.1), представляет собой поверхность.

`Доказательство.` И тут я забил.